6ο χλμ Σερρών – Δράμας
2321051111
info@aristotelio.gr
www.aristotelio.gr

Ενδεικτικές λύσεις των θεμάτων για τις εξετάσεις υποτροφιών της Α΄ τάξης Λυκείου του σχολικού έτους 2024-2025

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να χαρακτηρίσετε ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις και να μεταφέρετε στο τετράδιο τις απαντήσεις σας

(1) Αν $\alpha+\beta=5$ τότε $\alpha^2+\beta^2=25$

(2) Ισχύει: $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

(3) Ισχύει: $\alpha^2+\beta^2=(\alpha-\beta)^2+2\alpha\beta$

(4) Ισχύει: $x^3+y^3+3xy(x+y)=(x+y)^3$

(5) Ισχύει: $(-x-2)^2=-x^2-4x-4$

(6) Ισχύει: $(-\alpha-\beta)(\alpha-\beta)=\beta^2-\alpha^2$

(7) Η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, $\alpha\neq 0$, δεν είναι ποτέ αδύνατη αν $\alpha\gamma<0$

(8) Δυο ορθογώνια τρίγωνα, που έχουν τις οξείες γωνίες τους ίσες μία προς μία, είναι ίσα.

(9) Αν τριπλασιάσουμε τις πλευρές ενός τριγώνου τότε το εμβαδόν του τριπλασιάζεται.

(10) Αν δυο τρίγωνα είναι όμοια τότε είναι ίσα.

Μονάδες: 10 x 1 = 10

Λύση

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
Λ	Σ	Σ	Σ	Λ	Λ	Σ	Λ	Λ	Λ

Α2. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

$$A=(3x+2)^2+(x-2)(x-3)-6-4(x-1)^2+3x$$

$$B=(2x-1)^2-(3-x)^2-(x+1)(2x-1)+5$$

Μονάδες: 2 x 4 = 8

Λύση

$$A=(3x+2)^2+(x-2)(x-3)-6-4(x-1)^2+3x=$$

$$=9x^2+12x+4+x^2-\cancel{3x}-2x+\cancel{6}-\cancel{6}-4(x^2-2x+1)+\cancel{3x}=$$

$$=9x^2+12x+\cancel{4}+x^2-2x-4x^2+8x-\cancel{4}=6x^2+18x$$

$$B=(2x-1)^2-(3-x)^2-(x+1)(2x-1)+5=$$

$$=4x^2-4x+1-(9-6x+x^2)-(2x^2-x+2x-1)+5=$$

$$=4x^2-4x+1-9+6x-x^2-2x^2+x-2x+1+5=$$

$$=x^2+x-2$$

Α3. Αν $x+\frac{1}{x}=2$ να βρεθούν οι τιμές των παραστάσεων:

(α) $x^2+\frac{1}{x^2}$

(β) $x^3+\frac{1}{x^3}$

Μονάδες: 4 + 3 = 7

Λύση

(α) Γνωρίζουμε ότι $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$, άρα:

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\cdot\cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}=2^2-2=4-2=2$$

(β) Γνωρίζουμε ότι $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$, άρα:

$$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\cdot\cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}\cdot\left(x+\frac{1}{x}\right)=2^3-3\cdot2=8-6=2$$

<u>ΘΕΜΑ Β</u>

Β1. Αν $P(x)=(-5x^2+4x-3)-(x^2-2x+1)+(3x^2+x)$ και $Q(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, να βρείτε τις τιμές των α, β, γ, ώστε τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ να είναι ίσα.

Μονάδες: 3

<u>Λύση</u>

Απλοποιούμε το πολυώνυμο $P(x)$:

$$P(x)=(-5x^2+4x-3)-(x^2-2x+1)+(3x^2+x)=-5x^2+4x-3-x^2+2x-1+3x^2+x=$$
$$=-3x^2+7x-4$$

Συνεπώς για να είναι $P(x)=Q(x)$ πρέπει να είναι $\alpha=-3$, $\beta=7$ και $\gamma=-4$.

Β2. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

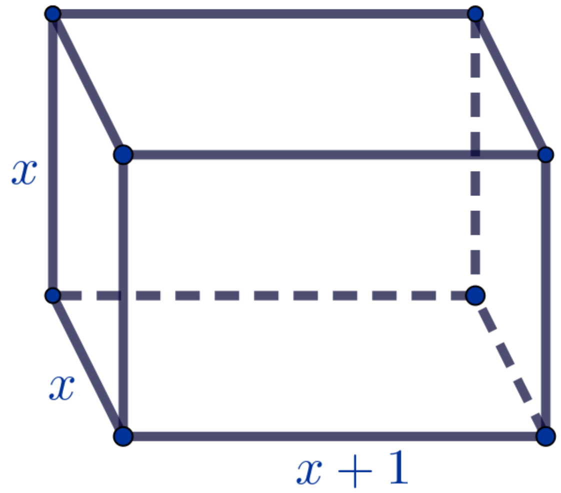
(α) Ο όγκος του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου είναι:

1. $3x+1$

2. x^3+1

3. x^3+x^2

4. x^3+x



Μονάδα: 2

<u>Λύση</u>

Ο όγκος του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου είναι:

$$V=\alpha\cdot\beta\cdot\gamma=x\cdot x\cdot(x+1)=x^2(x+1)=x^3+x^2$$

Συνεπώς η σωστή απάντηση είναι η **3.**

(β) Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου είναι:

1. $6x^2+4x+1$

2. $4x^2+6x$

3. $6x^2+4x+2$

4. $6x^2+4x$

Μονάδα: 2

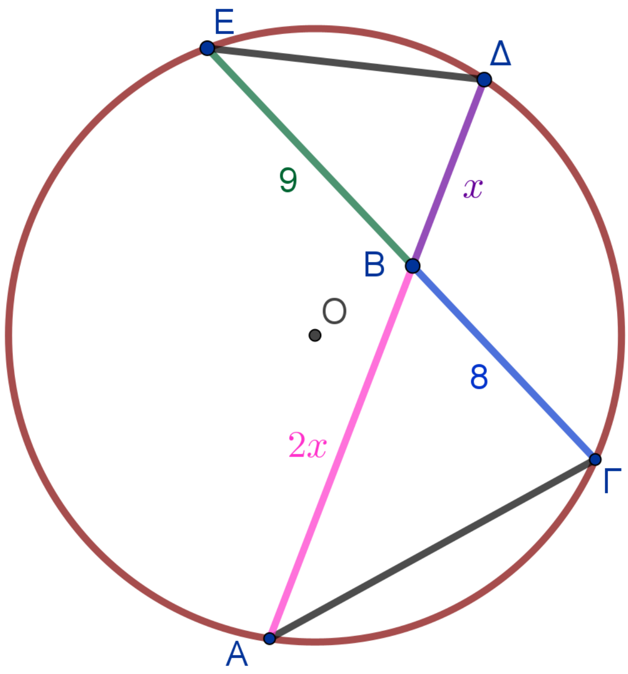
Λύση

Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου είναι:

$$E_{ολ}=2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=2\left[x(x+1)+x\cdot x+x(x+1)\right]=2\left(x^2+x+x^2+x^2+x\right)=2\left(3x^2+2x\right)=$$
$$=6x^2+4x$$

Συνεπώς η σωστή απάντηση είναι η 4**.**

B3. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ότι $EB = 9\ cm$, $B\Gamma = 8\ cm$, $BA = 2x$ και $B\Delta = x$ να βρεθεί το x (σε cm).



Μονάδες: 10

Λύση

Συγκρίνουμε ως προς την ομοιότητα τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΔΕ:

$A\overset{\triangle}{B}\Gamma$	$B\overset{\triangle}{\Delta}E$

$\hat{A} = \hat{E}$ (βαίνουν στο ίδιο τόξο ΓΔ)

$\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}$ (βαίνουν στο ίδιο τόξο ΑΕ)

Άρα $A\overset{\triangle}{\Gamma}B \approx E\overset{\triangle}{\Delta}B$, συνεπώς:

$$\cancel{\frac{A\Gamma}{E\Delta}} = \frac{\Gamma B}{\Delta B} = \frac{AB}{EB}$$

$$\frac{8}{x} = \frac{2x}{9}$$

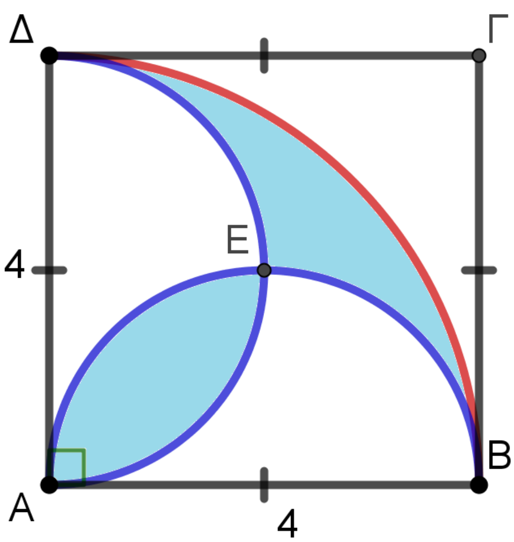
$$2x^2 = 72$$

$$x^2 = 36$$

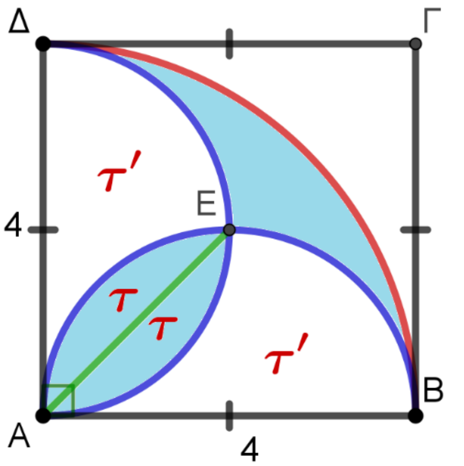
$$x = 6\ cm$$

Β4. Στο διπλανό σχήμα:
(α) το τετράπλευρο είναι τετράγωνο πλευράς μήκους 4 εκ. (β) οι δύο γαλάζιες γραμμές είναι ημικύκλια διαμέτρου 4 εκ.
(γ) η κόκκινη γραμμή είναι τεταρτοκύκλιο (ένα τέταρτο κύκλου) ακτίνας 4 εκ.
Να υπολογίσετε το εμβαδόν της γαλάζιας περιοχής.

Μονάδες: 8



Λύση



Η περιοχή τ έχει εμβαδόν:

$$E_{\tau} = \frac{\pi \cdot 2^2}{4} - \frac{2 \cdot 2}{2} = \frac{4\pi}{4} - \frac{4}{2} = \pi - 2 \text{ τ. εκ.}$$

Η περιοχή τ′ έχει εμβαδόν:

$$E_{\tau'} = \frac{\pi \cdot 2^2}{2} - 2E_{\tau} = 2\pi - 2(\pi - 2) = 2\pi - 2\pi + 4 = 4 \text{ τ. εκ.}$$

Η ζητούμενη περιοχή έχει εμβαδόν:

$$E = \frac{\pi \cdot 4^2}{4} - 2E_{\tau'} = 4\pi - 2 \cdot 4 = 4\pi - 8 \text{ τ. εκ.}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Δίνεται η εξίσωση $\left(\alpha+\gamma\right)x^2-2\beta x+\left(\alpha-\gamma\right)=0$, όπου α, β, γ είναι τα μήκη των πλευρών τριγώνου ΑΒΓ. Αν η εξίσωση έχει μία διπλή λύση, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά ΒΓ.

Μονάδες: 5

Λύση

Η εξίσωση έχει μία διπλή λύση, άρα:

$\Delta=0$

$\left(-2\beta\right)^2-4\left(\alpha+\gamma\right)\left(\alpha-\gamma\right)=0$

$4\beta^2-4\left(\alpha^2-\gamma^2\right)=0$

$\beta^2-\left(\alpha^2-\gamma^2\right)=0$

$\beta^2-\alpha^2+\gamma^2=0$

$\beta^2+\gamma^2=\alpha^2$

$\mathrm{A\Gamma}^2+\mathrm{AB}^2=\mathrm{B\Gamma}^2$

Άρα από το αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος προκύπτει ότι, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά ΒΓ.

Γ2. (α) Να συγκρίνετε τους αριθμούς Δ και Ε όπου:

$$\Delta=\sqrt{6-3\sqrt{3}}\cdot\sqrt{6+3\sqrt{3}}\ \text{ και }\ \mathrm{E}=\frac{3}{5-\sqrt{10}}+\frac{3}{5+\sqrt{10}}$$

Μονάδες: 3

(β) Να απλοποιήσετε την παράσταση $\Gamma=\sqrt{\Delta^2+\mathrm{E}^2+\left(-1\right)^{\Delta}+\left(-2\right)^{\mathrm{E}}}$

Μονάδες: 3

Λύση

(α) Απλοποιούμε τις αριθμητικές παραστάσεις Δ και Ε:

$$\Delta=\sqrt{6-3\sqrt{3}}\cdot\sqrt{6+3\sqrt{3}}=\sqrt{\left(6-3\sqrt{3}\right)\left(6+3\sqrt{3}\right)}=\sqrt{6^2-\left(3\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{36-9\cdot3}=\sqrt{36-27}=$$

$$=\sqrt{9}=3$$

$$\mathrm{E}=\frac{3}{5-\sqrt{10}}+\frac{3}{5+\sqrt{10}}=\frac{3\left(5+\sqrt{10}\right)+3\left(5-\sqrt{10}\right)}{\left(5+\sqrt{10}\right)\left(5-\sqrt{10}\right)}=\frac{15+\cancel{3\sqrt{10}}+15-\cancel{3\sqrt{10}}}{5^2-\left(\sqrt{10}\right)^2}=\frac{30}{25-10}=$$

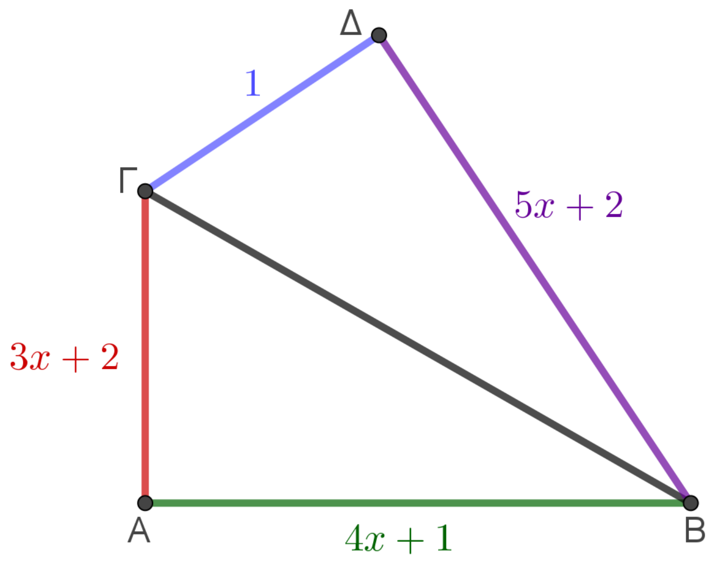
$$=\frac{30}{15}=2$$

Άρα $\Delta>\mathrm{E}$

(β) $\Gamma=\sqrt{\Delta^2+\mathrm{E}^2+\left(-1\right)^{\Delta}+\left(-2\right)^{\mathrm{E}}}=\sqrt{3^2+2^2+\left(-1\right)^3+\left(-2\right)^2}=\sqrt{9+4-1+4}=\sqrt{16}=4$

Γ3. Αν το τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος είναι ορθογώνιο με $\hat{A}=90^\circ$, να αποδείξετε ότι και το τρίγωνο ΒΓΔ είναι ορθογώνιο με ορθή γωνία στην κορυφή Δ.

Μονάδες: 5



Λύση

Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=90^\circ$ έχουμε:

$$\mathrm{B\Gamma}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{A\Gamma}^2$$
$$\mathrm{B\Gamma}^2=\left(4x+1\right)^2+\left(3x+2\right)^2$$
$$\mathrm{B\Gamma}^2=\left(16x^2+8x+1\right)+\left(9x^2+12x+4\right)$$
$$\mathrm{B\Gamma}^2=16x^2+8x+1+9x^2+12x+4$$
$$\mathrm{B\Gamma}^2=25x^2+20x+5\ \ (1)$$

Στο τρίγωνο ΒΓΔ έχουμε:

$$\mathrm{B\Delta}^2+\Gamma\Delta^2=\left(5x+2\right)^2+1^2=25x^2+20x+4+1=25x^2+20x+5\overset{(1)}{=}\mathrm{B\Gamma}^2$$

Έτσι από το αντίστροφο του Πυθαγόρειου θεωρήματος συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο ΒΓΔ είναι ορθογώνιο με ορθή γωνία στην κορυφή Δ.

Γ4. Δίνεται η εξίσωση: $2x^2-8x+3\kappa+2=0$

(α) Να βρείτε το κ ώστε η εξίσωση να έχει μια διπλή ρίζα.

Λύση

Για να έχει μια διπλή ρίζα πρέπει να είναι:

$$\Delta=0$$
$$\beta^2-4\alpha\gamma=0$$
$$\left(-8\right)^2-4\cdot2\cdot\left(3\kappa+2\right)=0$$
$$64-8\left(3\kappa+2\right)=0$$
$$64=8\left(3\kappa+2\right)$$
$$8=3\kappa+2$$
$$3\kappa=6$$
$$\kappa=2$$

(β) Για $\kappa=2$:

(i) Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)=-2(x-2)^2-4+2x^2-8x+3\kappa+2$ είναι σταθερό με τιμή -4.

(ii) Να λύσετε την εξίσωση: $(x-1)^2+P(x)=0$

(iii) Να βρείτε την τιμή: $P\left(\sqrt{2.024}-\sqrt{2.023}\right)$.

Μονάδες: 4 + 2 + 2 + 1 = 9

Λύση

(i) Για $\kappa=2$ έχουμε:

$P(x)=-2(x-2)^2-4+2x^2-8x+3\cdot2+2=-2(x^2-4x+4)-4+2x^2-8x+6+2=$

$\cancel{-2x^2}\cancel{+8x}\cancel{-8}-4\cancel{+2x^2}\cancel{-8x}\cancel{+8}=-4$

(ii) $(x-1)^2+P(x)=0$

$(x-1)^2-4=0$

$(x-1)^2=4$

$x-1=-\sqrt{4}$ ή $x-1=\sqrt{4}$

$x-1=-2$ ή $x-1=2$

$x=-2+1$ ή $x=2+1$

$x=-1$ ή $x=3$

(iii) $P\left(\sqrt{2.024}-\sqrt{2.023}\right)=-4$

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha=\sqrt{1+\sqrt{3+\sqrt{36}}}$, $\beta=\dfrac{4^{10}}{2^{18}}$ και το πολυώνυμο $P(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ το οποίο έχει μια διπλή ρίζα.

Δ1. Να βρείτε τα α, β, γ

Μονάδες: 6

Λύση

$\alpha=\sqrt{1+\sqrt{3+\sqrt{36}}}=\sqrt{1+\sqrt{3+6}}=\sqrt{1+\sqrt{9}}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$

$\beta=\dfrac{4^{10}}{2^{18}}=\dfrac{\left(2^2\right)^{10}}{2^{18}}=\dfrac{2^{20}}{2^{18}}=2^{20-18}=2^2=4$

Για $\alpha=2$ και $\beta=4$ το πολυώνυμο γίνεται $P(x)=2x^2+4x+\gamma$.

Για να έχει διπλή ρίζα πρέπει:

$\Delta=0$ ή $\beta^2-4\alpha\gamma=0$ ή $4^2-4\cdot2\cdot\gamma=0$ ή $16-8\gamma=0$ ή $8\gamma=16$ ή $\gamma=2$

Δ2. Για $\alpha=2$, $\beta=4$, $\gamma=2$ και για πολυώνυμο $Q(x)=P(x)-(x+2)^2-x^2$

(α) Να δείξετε ότι $Q(x)$ είναι σταθερό

Μονάδες: 3

(β) Να λυθεί η εξίσωση $x^2=Q^2(x)$

Μονάδες: 2

(γ) Να υπολογίσετε το πρόσημο της τιμής $Q(2.023^{2.024})$

Μονάδες: 2

Λύση

(α) $Q(x)=P(x)-(x+2)^2-x^2=2x^2+4x+2-(x^2+4x+4)-x^2=$

$=2x^2+4x+2-x^2-4x-4-x^2=2$

(β) $x^2=Q^2(x)$

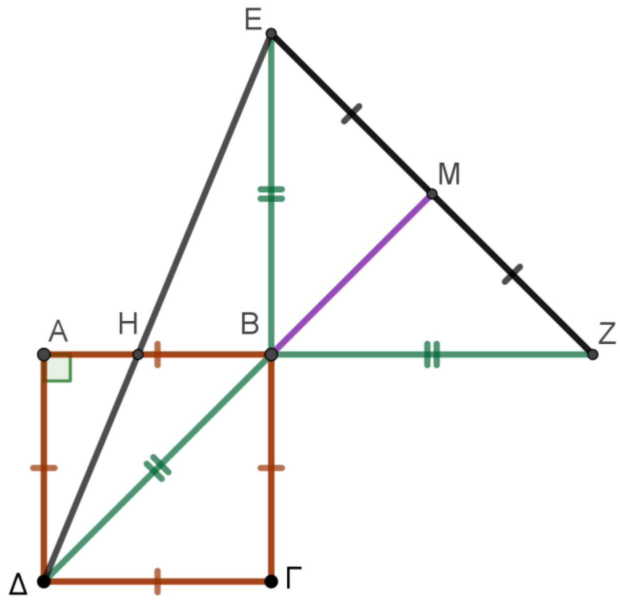
$x^2=2^2$

$x^2=4$

$x=-2$ ή $x=2$

(γ) $Q(2.023^{2.024})=2$

Δ3. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ με πλευρά μήκους α cm. Προεκτείνουμε τις πλευρές ΑΒ και ΓΒ κατά τμήματα ΒΖ και ΒΕ ώστε $BZ = BE = \Delta B$. Αν το σημείο Μ είναι το μέσο του ΕΖ και Η το σημείο τομής της ΔΕ με την ΑΒ, τότε να δείξετε ότι:



(α) $B\Delta = \alpha\sqrt{2}$ cm

(β) $EZ = 2\alpha$ cm

(γ) $BM = \alpha$ cm

(δ) $BH = \alpha\left(2-\sqrt{2}\right)$ cm

(Το σχήμα δεν είναι απαραίτητο να σχεδιαστεί στο τετράδιο των απαντήσεων σας)

Μονάδες: 4 x 3 = 12

Λύση

(α) Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΓΔ (με υποτείνουσα την ΒΔ):

$B\Delta^2 = B\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2$

$B\Delta^2 = \alpha^2 + \alpha^2$

$B\Delta^2 = 2\alpha^2$

$B\Delta = \sqrt{2\alpha^2}$

$B\Delta = \alpha\sqrt{2}$ cm (το α>0 ως μήκος ευθυγράμμου τμήματος)

(β) Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΕΖ (με υποτείνουσα την ΕΖ):

$EZ^2 = BE^2 + BZ^2$

$EZ^2 = \left(\alpha\sqrt{2}\right)^2 + \left(\alpha\sqrt{2}\right)^2$

$EZ^2 = 2\alpha^2 + 2\alpha^2$

$EZ^2 = 4\alpha^2$

$EZ = \sqrt{4\alpha^2}$

$EZ = 2\alpha$ cm

(γ) Το ευθύγραμμο τμήμα ΒΜ είναι διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου ΒΕΖ προς την υποτείνουσα του ΕΖ, συνεπώς:

$BM = \dfrac{EZ}{2} = \dfrac{2\alpha}{2} = \alpha$ cm

(δ) Συγκρίνω τα τρίγωνα ΒΕΗ και ΓΔΕ ως προς την ομοιότητα:

$\overset{\triangle}{\mathrm{BEH}}$	$\overset{\triangle}{\mathrm{\Gamma\Delta E}}$

$\hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma}$ $\quad (=90^{o})$

$\hat{\mathrm{E}} = \hat{\mathrm{E}}$ $\quad$ (κοινή γωνία)

Άρα $\overset{\triangle}{\mathrm{BEH}} \approx \overset{\triangle}{\mathrm{\Gamma E\Delta}}$, συνεπώς:

$$\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{\Gamma E}} = \cancel{\frac{\mathrm{EH}}{\mathrm{E\Delta}}} = \frac{\mathrm{BH}}{\mathrm{\Gamma\Delta}}$$

$$\frac{\alpha\sqrt{2}}{\alpha\sqrt{2}+\alpha} = \frac{\mathrm{BH}}{\alpha}$$

$$\frac{\cancel{\alpha}\sqrt{2}}{\cancel{\alpha}\left(\sqrt{2}+1\right)} = \frac{\mathrm{BH}}{\alpha}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}+1\right)} = \frac{\mathrm{BH}}{\alpha}$$

$$\left(\sqrt{2}+1\right)\mathrm{BH} = \alpha\sqrt{2}$$

$$\mathrm{BH} = \frac{\alpha\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$$

$$\mathrm{BH} = \frac{\alpha\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)}{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}$$

$$\mathrm{BH} = \frac{\alpha\left[\left(\sqrt{2}\right)^{2}-\sqrt{2}\right]}{\left(\sqrt{2}\right)^{2}-1^{2}}$$

$$\mathrm{BH} = \frac{\alpha\left(2-\sqrt{2}\right)}{2-1}$$

$$\mathrm{BH} = \alpha\left(2-\sqrt{2}\right)\,\mathrm{cm}$$