

Ενδεικτικές λύσεις των θεμάτων για τις εξετάσεις υποτροφιών της Α' τάξης Λυκείου του σχολικού έτους 2025-2026

ΘΕΜΑ Α

A1. Να χαρακτηρίσετε ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις και να μεταφέρετε στο τετράδιο τις απαντήσεις σας

- (1) Σε κάθε τρίγωνο ισχύει $\sin(A + B) = -\sin \Gamma$
- (2) Ο λόγος ομοιότητας δύο όμοιων πολυγώνων είναι ίσος με τον λόγο των περιμέτρων τους.
- (3) $(-\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2$
- (4) Δύο ισόπλευρα τρίγωνα είναι πάντοτε όμοια.
- (5) Η διάμεσος ενός τριγώνου είναι ύψος και διχοτόμος.
- (6) Αν $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 0$, τότε $x = 2$ και $y = -1$.
- (7) Αν για μία εξίσωση 2^{ου} βαθμού ισχύει ότι $\Delta \geq 0$, τότε η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες.
- (8) Αν $\eta_{\mu\omega} = 1$, τότε $\sin \omega = 0$.
- (9) Αν διπλασιάσουμε την ακτίνα ενός κύκλου τότε το εμβαδόν του διπλασιάζεται.
- (10) Δεν υπάρχει γωνία ω με $\sin \omega = \frac{3}{2}$.

Μονάδες: 10 x 1 = 10

Λύση

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
Σ	Σ	Σ	Σ	Λ	Σ	Λ	Σ	Λ	Σ

A2. Αν $x = 10^{-3}$ και $y = -0,1^{-2}$ να υπολογίσετε την παράσταση

$$A = (x^3 \cdot y^{-1})^2 : [x^{-1} \cdot y (x^3 \cdot y^{-3})^{-1}]^{-2}$$

Μονάδες: 7

Λύση

$$\begin{aligned} A &= (x^3 \cdot y^{-1})^2 : [x^{-1} \cdot y (x^3 \cdot y^{-3})^{-1}]^{-2} = (x^6 \cdot y^{-2}) : (x^{-1} \cdot y \cdot x^{-3} \cdot y^3)^{-2} = (x^6 \cdot y^{-2}) : (x^{-4} \cdot y^4)^{-2} = \\ &= (x^6 \cdot y^{-2}) : (x^8 \cdot y^{-8}) = x^{-2} \cdot y^6 = \frac{y^6}{x^2} = \frac{(-0,1^{-2})^6}{(10^{-3})^2} = \frac{0,1^{-12}}{10^{-6}} = \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^{-12}}{10^{-6}} = 10^6 \cdot 10^{12} = 10^{18} \end{aligned}$$

A3. Δίνεται η παράσταση $A = \left(\frac{1}{x^3 - 4x^2 + 4x} - \frac{1}{2x^3 - 8x} \right) : \frac{x+6}{2x^2 + 4x}$.

(α) Να αποδείξετε ότι $A = \frac{1}{(x-2)^2}$.

(β) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{1}{A} = 25$.

Μονάδες: 2 x 4 = 8

Λύση

$$\begin{aligned} \text{(α)} \quad A &= \left(\frac{1}{x^3 - 4x^2 + 4x} - \frac{1}{2x^3 - 8x} \right) : \frac{x+6}{2x^2 + 4x} = \\ &= \left(\frac{1}{x(x^2 - 4x + 4)} - \frac{1}{2x(x^2 - 4)} \right) : \frac{x+6}{2x(x+2)} = \left(\frac{1}{x(x-2)^2} - \frac{1}{2x(x-2)(x+2)} \right) \cdot \frac{2x(x+2)}{x+6} = \\ &= \left(\frac{1}{x(x-2)^2} - \frac{1}{2x(x-2)(x+2)} \right) \cdot \frac{2x(x+2)}{x+6} = \frac{2(x+2) - (x-2)}{2x(x-2)^2(x+2)} \cdot \frac{2x(x+2)}{x+6} = \\ &= \frac{2x+4-x+2}{(x-2)^2(x+6)} = \frac{x+6}{(x-2)^2(x+6)} = \frac{1}{(x-2)^2} \end{aligned}$$

$$\text{(β)} \quad \frac{1}{A} = 25$$

$$(x-2)^2 = 25$$

$$x-2 = -5 \text{ ή } x-2 = 5$$

$$x = -5+2 \text{ ή } x = 5+2$$

$$x = -3 \text{ ή } x = 7$$

ΘΕΜΑ Β

B1. Να αποδείξετε ότι $\frac{\sigma\upsilon\alpha}{1-\eta\mu\alpha} + \frac{1-\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\alpha} = \frac{2}{\sigma\upsilon\alpha}$

Μονάδες: 4

Λύση

$$\begin{aligned}\frac{\sigma\upsilon\alpha}{1-\eta\mu\alpha} + \frac{1-\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\alpha} &= \frac{\sigma\upsilon\alpha^2 + (1-\eta\mu\alpha)^2}{(1-\eta\mu\alpha) \cdot \sigma\upsilon\alpha} = \frac{\sigma\upsilon\alpha^2 + 1 - 2\eta\mu\alpha + \eta\mu^2\alpha}{(1-\eta\mu\alpha) \cdot \sigma\upsilon\alpha} = \frac{2 - 2\eta\mu\alpha}{(1-\eta\mu\alpha) \cdot \sigma\upsilon\alpha} = \\ &= \frac{2(1-\eta\mu\alpha)}{(1-\eta\mu\alpha) \cdot \sigma\upsilon\alpha} = \frac{2}{\sigma\upsilon\alpha}\end{aligned}$$

B2. Αν για μια γωνία ω ισχύουν: $90^\circ < \omega < 180^\circ$ και $4\epsilon\varphi\omega + 3 = 0$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \frac{5\eta\mu(180^\circ - \omega) - 4\epsilon\varphi(180^\circ - \omega)}{10\sigma\upsilon\upsilon(180^\circ - \omega)}$.

Μονάδες: 7

Λύση

$$4\epsilon\varphi\omega + 3 = 0 \Leftrightarrow \epsilon\varphi\omega = -\frac{3}{4} \Leftrightarrow \epsilon\varphi^2\omega = \frac{9}{16} \Leftrightarrow \frac{\eta\mu^2\omega}{\sigma\upsilon\upsilon^2\omega} = \frac{9}{16} \Leftrightarrow \frac{1-\sigma\upsilon\upsilon^2\omega}{\sigma\upsilon\upsilon^2\omega} = \frac{9}{16} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9\sigma\upsilon\upsilon^2\omega = 16 - 16\sigma\upsilon\upsilon^2\omega \Leftrightarrow 25\sigma\upsilon\upsilon^2\omega = 16 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\upsilon^2\omega = \frac{16}{25} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\upsilon\omega = -\frac{4}{5}$$

$$\eta\mu^2\omega = 1 - \sigma\upsilon\upsilon^2\omega \Leftrightarrow \eta\mu^2\omega = 1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2 \Leftrightarrow \eta\mu^2\omega = 1 - \frac{16}{25} \Leftrightarrow \eta\mu^2\omega = \frac{9}{25} \Leftrightarrow \eta\mu\omega = \frac{3}{5}$$

$$A = \frac{5\eta\mu(180^\circ - \omega) - 4\epsilon\varphi(180^\circ - \omega)}{10\sigma\upsilon\upsilon(180^\circ - \omega)} = \frac{5\eta\mu\omega + 4\epsilon\varphi\omega}{-10\sigma\upsilon\upsilon\omega} = -\frac{5 \cdot \frac{3}{5} + 4 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)}{10 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right)} = -\frac{3-3}{2(-4)} = 0$$

B.3 Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: -2x + 3y = 0$ και $\varepsilon_2: y = -x + 5$ οι οποίες τέμνονται στο σημείο B, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

(α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων που τέμνει η ε_2 τους άξονες.

Μονάδες: 4

(β) Να εξετάσετε αν το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο.

Μονάδες: 6

(γ) Ποια από τις δύο ευθείες εκφράζει ανάλογα ποσά;

Μονάδες: 3

(δ) Να γράψετε μια ευθεία που να είναι παράλληλη στην ε_2 .

Μονάδες: 3

Λύση

(α) Για $y = 0$: $0 = -x + 5 \Leftrightarrow x = 5$, άρα η ευθεία ε_2 τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $\Gamma(5, 0)$.

Για $x = 0$: $y = -0 + 5 = 5$, άρα η ευθεία ε_2 τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $\Delta(0, 5)$.

(β) Βρίσκουμε τις συντεταγμένες του σημείου B λύνοντας το σύστημα:

$$\begin{cases} -2x + 3y = 0 \\ x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 3y = 0 \\ 2x + 2y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y = 10 \\ x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x + 2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 3 \end{cases}$$

Θα βρούμε τις πλευρές AB, AΓ και BΓ ώστε να εφαρμόσουμε το αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος:

$$A\Gamma = 5$$

Στο τρίγωνο ABE, με Πυθαγόρειο θεώρημα:

$$AB^2 = BE^2 + AE^2 \Leftrightarrow AB^2 = 2^2 + 3^2 \Leftrightarrow AB^2 = 13 \Leftrightarrow AB = \sqrt{13}$$

Στο τρίγωνο BEΓ, με Πυθαγόρειο θεώρημα:

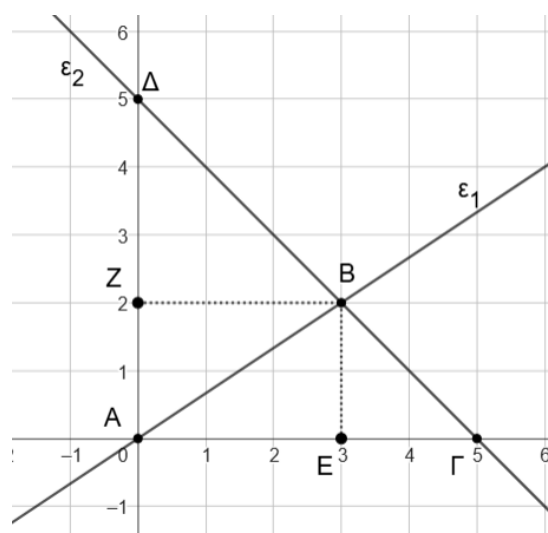
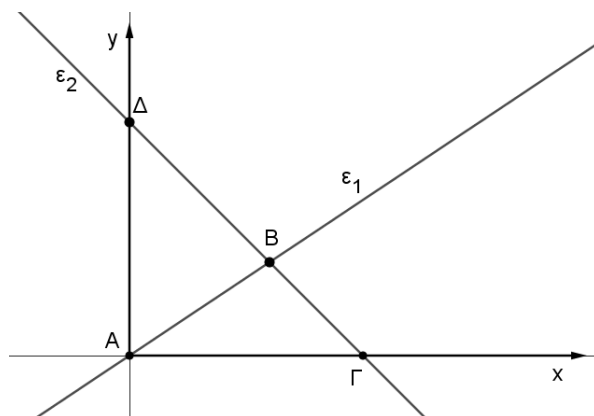
$$B\Gamma^2 = BE^2 + E\Gamma^2 \Leftrightarrow B\Gamma^2 = 2^2 + 2^2 \Leftrightarrow B\Gamma^2 = 8 \Leftrightarrow B\Gamma = \sqrt{8}$$

Ελέγχουμε το αντίστροφο:

$A\Gamma^2 = 25$ και $AB^2 + B\Gamma^2 = 13 + 8 = 21$ Επομένως $A\Gamma^2 \neq AB^2 + B\Gamma^2$ και το ABΓ δεν είναι ορθογώνιο.

(γ) Η ε_1

(δ) $y = -x + 1$



ΘΕΜΑ Γ

Γ.1 Στο παρακάτω διάγραμμα παρουσιάζονται οι βαθμοί ενός μαθητή στα τέσσερα από τα πέντε διαγωνίσματα Μαθηματικών.

Αν ο μέσος όρος των βαθμών του και στα πέντε διαγωνίσματα είναι 16, πόσο έγραψε ο μαθητής στο 5^ο διαγώνισμα;

Μονάδες: 6



Λύση

$$16 = \frac{14 + 18 + 15 + 13 + x}{5}$$

$$60 + x = 80$$

$$x = 20$$

Γ.2 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Στα σημεία B και Γ φέρουμε τα τμήματα $B\Delta \perp B\Gamma$ και $E\Gamma \perp B\Gamma$, όπως φαίνεται στο σχήμα, τέτοια ώστε $B\Delta = \Gamma E$.

(α) Αν M είναι το μέσο της βάσης $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $B\Delta M$ και $\Gamma E M$ είναι ίσα.

Μονάδες: 4

(β) Να δείξετε ότι $A\Delta = A E$.

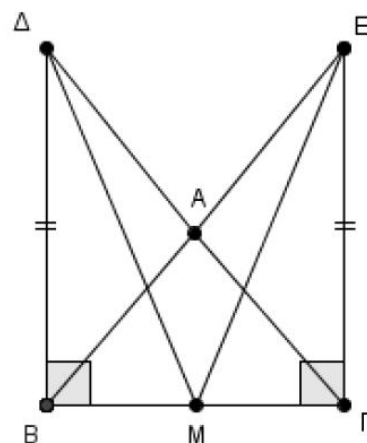
Μονάδες: 5

(γ) Αν γνωρίζετε ότι $A\Delta = 8\text{ cm}$, $\Delta M = 13\text{ cm}$ και $B\Gamma = 10\text{ cm}$ να υπολογίσετε την περίμετρο του $A\Gamma B\Delta$.

Μονάδες: 5

(δ) Το τοπογραφικό σχέδιο ενός οικοπέδου με κλίμακα 1:100 έχει το σχήμα της τεθλασμένης γραμμής $A\Gamma B\Delta A$ με διαστάσεις που βρήκατε στο ερώτημα (γ). Να υπολογίσετε τα χρήματα που θα πληρώσει ο ιδιοκτήτης του οικοπέδου για να το περιφράξει, αν η περίφραξη κοστίζει 25 € ανά μέτρο.

Μονάδες: 5



Λύση

(α) Συγκρίνουμε ως προς την ισότητα τα τρίγωνα $\triangle MB\Delta$ και $\triangle M\Gamma E$:

$\triangle MB\Delta$	$\triangle M\Gamma E$
$BM = \Gamma M$	(M είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος BΓ)
$B\Delta = \Gamma E$	(δεδομένο)
$\angle MB\Delta = \angle M\Gamma E$	($= 90^\circ$)

Άρα $\triangle MB\Delta = \triangle M\Gamma E$.

(β) Συγκρίνουμε ως προς την ισότητα τα τρίγωνα $\triangle \Gamma B\Delta$ και $\triangle B\Gamma E$:

$\triangle \Gamma B\Delta$	$\triangle B\Gamma E$
BΓ	(κοινή πλευρά)
$B\Delta = \Gamma E$	(δεδομένο)
$\angle \Gamma B\Delta = \angle B\Gamma E$	($= 90^\circ$)

Άρα $\triangle \Gamma B\Delta = \triangle B\Gamma E \Rightarrow \Gamma\Delta = BE \Rightarrow \Delta A + \cancel{A\Gamma} = EA + \cancel{B\Gamma} \Rightarrow A\Delta = AE$.

(γ) $BM = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{10}{2} = 5$

$$B\Delta^2 = \Delta M^2 - BM^2 \Leftrightarrow B\Delta^2 = 13^2 - 5^2 \Leftrightarrow B\Delta^2 = 169 - 25 \Leftrightarrow B\Delta^2 = 144 \Leftrightarrow B\Delta = \sqrt{144} \Leftrightarrow B\Delta = 12$$

$$\Pi_{\text{ΑΕΓΒΔ}} = AE + E\Gamma + \Gamma B + B\Delta + \Delta A = 2A\Delta + 2B\Delta + B\Gamma = 2 \cdot 8 + 2 \cdot 12 + 10 = 16 + 24 + 10 = 50 \text{ cm}$$

(δ) Οι πραγματική περίμετρος είναι $\frac{1}{100} = \frac{0,5}{x} \Leftrightarrow x = 50 \text{ m}$

Τα χρήματα που θα πληρώσει ο ιδιοκτήτης του οικοπέδου για να το περιφράξει είναι $50 \cdot 25 = 1.250 \text{ €}$.

ΘΕΜΑ Δ

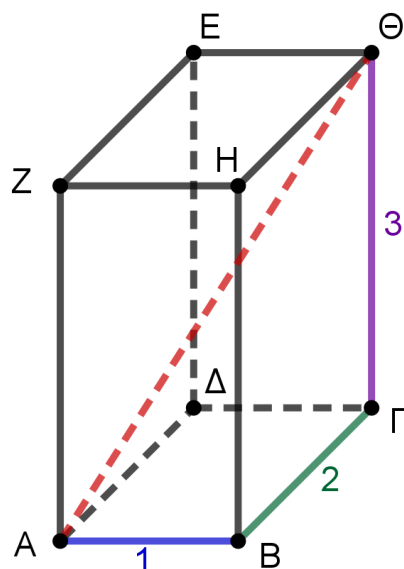
Δ.1 Το κουτί σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου του διπλανού σχήματος έχει μήκη ακμών 1, 2 και 3. Να υπολογίσετε:

(α) το μήκος της $A\Theta$

Μονάδες: 5

(β) το εμβαδόν της συνολικής του επιφάνειας

Μονάδες: 4



Λύση

$$(\alpha) \quad A\Gamma^2 = 1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5$$

$$A\Theta^2 = A\Gamma^2 + \Gamma\Theta^2 \Leftrightarrow A\Theta^2 = 5 + 3^2 \Leftrightarrow A\Theta^2 = 5 + 9 \Leftrightarrow A\Theta^2 = 14 \Leftrightarrow A\Theta = \sqrt{14}$$

(β) $E = 2 \cdot (1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 3) = 2 \cdot (2 + 6 + 3) = 2 \cdot 11 = 22 \text{ τ.μ.}$

Δ.2 Στο ακόλουθο σχήμα το πολύγωνο ΑΒΓΔΕΖ είναι ένα κανονικό εξάγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο Ο και ακτίνα ρ της οποίας το μήκος ισούται με την αριθμητική τιμή της παράστασης

$$Q = 2\sqrt{\sqrt{81} + \sqrt{36} - \sqrt{121}}$$

(α) Να δείξετε ότι $\varrho = 4$.

Μονάδες: 3

(β) Να βρείτε το μέτρο της γωνίας ΕΟΔ και να αιτιολογήσετε γιατί το τρίγωνο ΕΟΔ είναι ισόπλευρο.

Μονάδες: 4

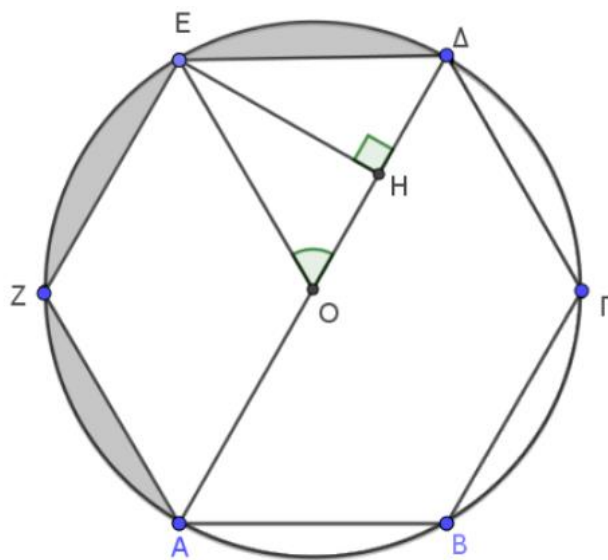
(γ) Να δείξετε ότι $EH = 2\sqrt{3} \text{ cm}$.

Μονάδες: 4

(δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν της σκιασμένης περιοχής.

Μονάδες: 5

$$\Deltaίνεται\ \acute{o}τι:\ \eta\mu 30^{\circ}=\sigma\upsilon\nu 60^{\circ}=\frac{1}{2},\ \eta\mu 60^{\circ}=\sigma\upsilon\nu 30^{\circ}=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \epsilon\varphi 30^{\circ}=\frac{\sqrt{3}}{3},\ \epsilon\varphi 60^{\circ}=\sqrt{3}$$



Λύση

$$(\alpha) \varrho = 2\sqrt{\sqrt{81} + \sqrt{36} - \sqrt{121}} = 2\sqrt{9 + 6 - 11} = 2\sqrt{4} = 2 \cdot 2 = 4$$

$$(\beta) \hat{E\hat{O}\Delta} = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$$

$$OE = O\Delta = \varrho, \text{ άρα } \hat{O\hat{E}\Delta} = \hat{O\hat{\Delta}E}$$

$$\hat{O\hat{E}\Delta} + \hat{O\hat{\Delta}E} + \hat{E\hat{O}\Delta} = 180^\circ \Leftrightarrow 2 \cdot \hat{O\hat{E}\Delta} + 60^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 2 \cdot \hat{O\hat{E}\Delta} = 120^\circ \Leftrightarrow \hat{O\hat{E}\Delta} = \hat{O\hat{\Delta}E} = 60^\circ$$

Συνεπώς $\triangle O\Delta E$ ισόπλευρο τρίγωνο

(γ) EH ύψος άρα και διάμεσος, έτσι:

$$EH^2 = OE^2 - OH^2 \Leftrightarrow EH^2 = \varrho^2 - \left(\frac{\varrho}{2}\right)^2 \Leftrightarrow EH^2 = \varrho^2 - \frac{\varrho^2}{4} \Leftrightarrow EH^2 = \frac{3\varrho^2}{4} \Leftrightarrow EH^2 = \frac{3 \cdot 4^2}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow EH^2 = 12 \Leftrightarrow EH = \sqrt{12} \Leftrightarrow EH = \sqrt{4 \cdot 3} \Leftrightarrow EH = 2\sqrt{3}$$

$$(\delta) E = E_{\eta\mu\kappa\upsilon\kappa\lambda\iota\omicron\upsilon} - E_{\tau\rho\alpha\pi\epsilon\zeta\iota\omicron\upsilon} = \frac{\pi \cdot \varrho^2}{2} - \frac{(A\Delta + ZE) \cdot EH}{2} = \frac{\pi \cdot 4^2}{2} - \frac{(8 + 4) \cdot 2\sqrt{3}}{2} =$$

$$= \pi \cdot 8 - 12\sqrt{3} = 4(2\pi - 3\sqrt{3}) \text{ τ.μ.}$$