

**Θέματα πανελληνίων διαγωνισμών Ε.Μ.Ε.**

Β' γυμνασίου – Θαλής

✓ 1995-1996

(1) Να χαράξετε κύκλο (Κ, 3cm). Με κέντρο το σημείο Λ του κύκλου να χαράξετε δεύτερο κύκλο (Λ, 3cm). Η διάκεντρος ΚΛ τέμνει τον Κ στο Α και τον Λ στο Β, αν προεκταθεί. Να κατασκευάσετε τις ακτίνες ΚΓ, ΛΔ κάθετες στην ΚΛ και προς το αυτό μέρος της ΚΛ.

(α) Τι είδους είναι τα σχήματα ΚΛΔΓ, ΑΓΔ, ΑΔΒ, ΑΚΔΓ, ΑΓΔΒ;

(β) Να υπολογίσετε τα εμβαδά των πέντε σχημάτων.

(2) Αν  $a \neq 0$  και  $a \neq -1$  να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$A = \frac{1}{a^{-1995} + 1} + \frac{1}{a^{-1994} + 1} + \dots + \frac{1}{a^0 + 1} + \dots + \frac{1}{a^{1994} + 1} + \frac{1}{a^{1995} + 1}$$

(3) Ποιος από τους αριθμούς Α, Β είναι μεγαλύτερος;

(α)  $A = (-1995)^{1996}$ ,  $B = (-1996)^{1995}$

(β)  $A = 1 - \left( \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100} \right)$ ,  $B = 0,0100001$

(γ)  $A = -\frac{5555553}{5555557}$ ,  $B = -\frac{6666665}{6666669}$

$$A = 1 - \left( \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100} \right) = 1 - \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} \right) =$$

$$1 - \left( 1 - \frac{1}{100} \right) = 1 - 1 + \frac{1}{100} = \frac{1}{100} = 0,01 < B$$

$$A = -\frac{5.555.553}{5.555.557} = -\frac{5.555.555 - 2}{5.555.555 + 2} = -\frac{5 \cdot 1.111.111 - 2}{5 \cdot 1.111.111 + 2} = -\frac{5x - 2}{5x + 2}, \text{ θέτο-}$$

ντας  $1.111.111 = x$

Επίσης:

$$B = -\frac{6.666.665}{6.666.669} = -\frac{6.666.666 - 1}{6.666.666 + 3} = -\frac{6 \cdot 1.111.111 - 1}{6 \cdot 1.111.111 + 3} = -\frac{6x - 1}{6x + 3}, \text{ θέτο-}$$

ντας  $1.111.111 = x$

(4) Έχετε 200 αυγά τα οποία θέλετε να τοποθετήσετε σε καλάθια κατά τρόπο, ώστε να περιέχουν διαφορετικό αριθμό αυγών. Ποιος είναι ο μέγιστος αριθμός καλάθιων που μπορείτε να χρησιμοποιήσετε σε αυτή τη διαδικασία;

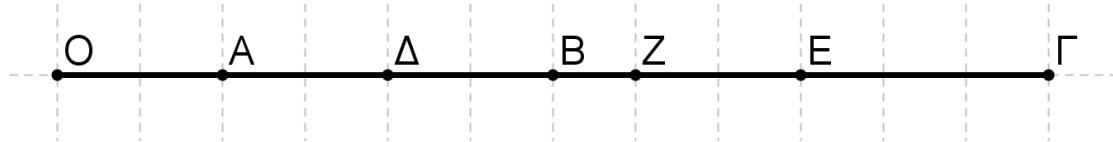
✓ 1996-1997

(1) Έστω οι αριθμοί  $\alpha, \beta$  με  $\frac{1}{2}\alpha + 2, 5\beta + 1, 5\alpha - \frac{1}{2}\beta = -6$ . Να βρείτε τη τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{114 - 3(\alpha - \beta) - 2(\alpha - 2\beta) - 5 + 3[5\alpha - (-\beta + 1)]}{-2(2\alpha - \beta) - 4(3\beta - 1) - 2(-2\alpha - 5\beta)}$$

(2) Κάποιος μαθητής έβαλε στο νου του πέντε αριθμούς διαφορετικούς μεταξύ τους ακέραιους, θετικούς και αρνητικούς, που το γινόμενο τους ήταν 20. Να βρείτε τους διαφορετικούς αυτούς ακέραιους.

(3) Στην ημιευθεία  $O\epsilon$  θεωρούμε σημεία  $A, B, \Gamma$  ώστε  $(OA) = 2m$ ,  $(OB) = 6m$ ,  $(O\Gamma) = 12m$ . Έστω  $\Delta, E, Z$  τα μέσα των  $AB, B\Gamma, \Gamma A$  αντίστοιχα. Να υπολογίσετε τα  $(\Delta Z)$ ,  $(E\Gamma)$ . Τι παρατηρείται;



(4) Ένα τετράγωνο λέγεται «μαγικό» όταν το άθροισμα των αριθμών σε κάθε οριζόντια γραμμή είναι ίσο με το άθροισμα των αριθμών σε κάθε στήλη και επίσης ίσο με το άθροισμα σε κάθε μια από τις δύο διαγώνιες.

π.χ.

εδώ αριστερά έχουμε  $2 + 7 + 6 = 9 + 5 + 1 = \dots = 15$ .

Σε κάποιο μαγικό τετράγωνο οι αριθμοί έσβησαν και έμειναν μόνο το 7 και το 13 όπως εδώ δεξιά. Να δείξετε ότι απαραίτητως σε κάποια θέση του μαγικού αυτού τετραγώνου υπάρχει ο αριθμός 1, ανεξάρτητα από τα ποια είναι τα υπόλοιπα νούμερα του.

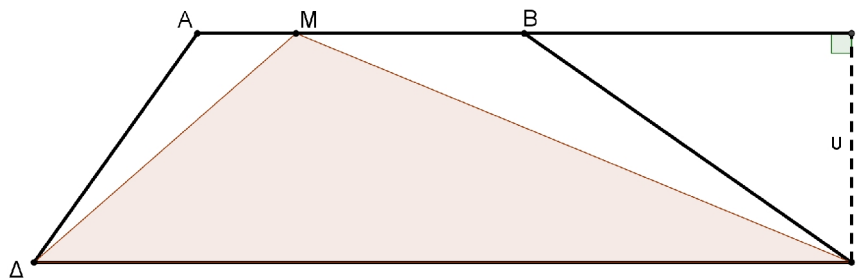
		7
13		

✓ 1997-1998

(1) Γράφουμε τους αριθμούς από το 1990 έως το 1997. Να εξετάσετε αν ο αριθμός που προκύπτει είναι πρώτος.

(2) Μια ποδοσφαιρική ομάδα έχει 20 ποδοσφαιριστές, από τους οποίους ο μικρότερος είναι 18 χρονών και ο μεγαλύτερος 33. Να εξετάσετε αν υπάρχουν δύο ποδοσφαιριστές με την ίδια ηλικία.

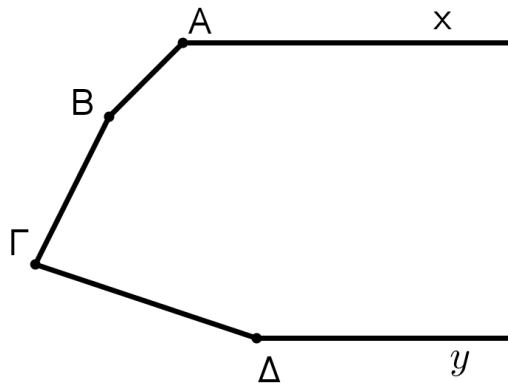
(3) Θεωρούμε το τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  ( $AB // \Gamma\Delta$ ) με  $AB = 10cm$  και  $\Gamma\Delta = 25cm$  και  $M$  τυχαίο σημείο της βάσης  $AB$ . Να βρείτε τη σχέση του εμβαδού του τριγώνου  $\Gamma\Delta M$  με το μέρος του τραπέζιου που περισεύει.



- (4) Στο σχολείο διοργανώνεται ένας διαγωνισμός χορού, στον οποίο θα συμμετέχουν μόνο ζευγάρια (αγόρι – κορίτσι). Δηλώνουν συμμετοχή ζευγάρια που σχηματίστηκαν από τα  $\frac{8}{13}$  του συνολικού αριθμού των αγοριών και τα  $\frac{2}{3}$  του συνολικού αριθμού των κοριτσιών. Να προσδιορίσετε το ποσοστό των μαθητών που λαμβάνουν μέρος στο χορό.

✓ 1998-1999

- (1) Στο σχήμα,



$Ax \parallel \Delta y$

Να υπολογίσετε το άθροισμα των γωνιών  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$ ,  $\hat{\Gamma}$ ,  $\hat{\Delta}$ .

- (2) Ένα δοχείο, όταν είναι κατά 30% άδειο, περιέχει 20 λίτρα περισσότερο από την περίπτωση που θα ήταν κατά 30% γεμάτο. Πόσα λίτρα περιέχει το δοχείο όταν είναι πλήρες;

- (3) Ν' αποδειχτεί ότι ο αριθμός

$$A = \frac{222223 \cdot 444441 \cdot 222220 + 222216}{222222^2}$$

είναι ακέραιος και να βρεθεί ο ακέραιος αυτός.

$$A = \frac{222223 \cdot 444441 \cdot 222220 + 222216}{222222^2} =$$

- (4) Ν' αποδειχτεί ότι ο αριθμός

$$A = 1998^2 - 1997^2 + 1996^2 - 1995^2 + \dots + 2^2 - 1^2$$

είναι πολλαπλάσιο του 1999.

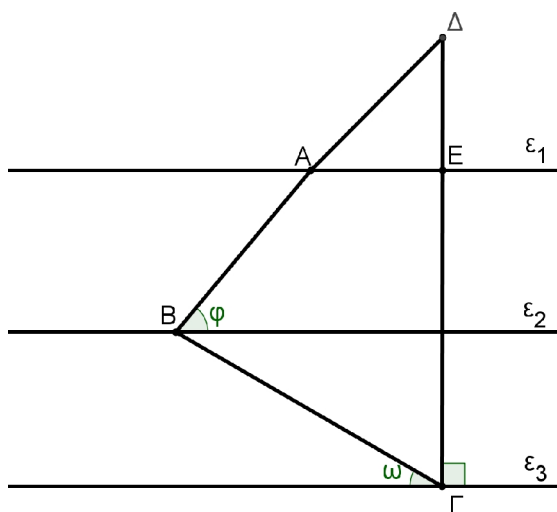
✓ 1999-2000

- (1) Πάνω σε μια ευθεία ( $\epsilon$ ) θεωρούμε τα διαδοχικά σημεία Α, Β, Γ. Έστω Μ είναι το μέσον του ΑΒ και Ν είναι το μέσον του ΒΓ. Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΜΝ, όταν:

(α) ΑΒ = 8cm, ΒΓ = 10cm

(β) ΑΒ = 10cm, ΑΓ = 18cm

(2) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ότι:



(α)  $(\varepsilon_1) // (\varepsilon_2) // (\varepsilon_3)$

(β)  $\Gamma\Delta \perp (\varepsilon_1)$

(γ)  $AE = E\Delta$

(δ)  $\omega = 30^\circ, \varphi = 50^\circ$

Να βρείτε τις γωνίες του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.

(3) Δίνονται οι αριθμοί:

$$A = (-2)^{1.000} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{500} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{998} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^{499}$$

$B = 2^v \cdot 3^{v+1}$ ,  $v$  άρτιος φυσικός

Να συγκρίνετε τους αριθμούς  $3 \cdot A^v$  και  $B$ .

✓ 2000-2001

(1) Δίνονται οι παραστάσεις  $A = 5^2 - 2^4 : 2^3 + 1$  και  $B = (5^2 - 2^4) : (2^3 + 1)$

Να βρείτε τις παραστάσεις  $A$ ,  $B$  και να συγκρίνετε τους αριθμούς

$$\frac{A}{20B}, \frac{22B}{A}$$

(2) Του τραπεζίου ΑΒΓΔ ( $A\Delta // B\Gamma$ ) δίνονται:

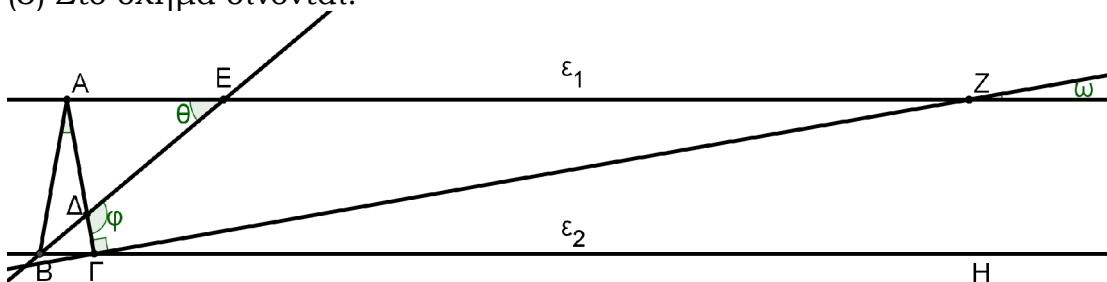
(α)  $AB = \Gamma\Delta = 12$  μέτρα

(β) Η περίμετρος του 54 μέτρα

(γ) Το εμβαδόν του  $E = 120$  τ.μ.

Να βρείτε το ύψος του  $u$ .

(3) Στο σχήμα δίνονται:



(α)  $(\varepsilon_1) // (\varepsilon_2)$

(β)  $AB = A\Gamma$  και  $B\hat{A}\Gamma = 20^\circ$

(γ) Η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας  $A\hat{B}\Gamma$

(δ)  $\Gamma\Delta \perp A\Gamma$

Να βρείτε τις γωνίες  $\varphi = \Gamma\hat{\Delta}E$ ,  $\theta = A\hat{E}\Delta$  και  $\omega$ .

Έχουμε  $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = \hat{A}\hat{\Gamma}\hat{B} = \frac{180^\circ - 20^\circ}{2} = \frac{160^\circ}{2} = 80^\circ$ , οπότε  $\hat{\Gamma}\hat{B}\hat{\Delta} = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ$

Επειδή η γωνία  $\varphi$  είναι εξωτερική στο τρίγωνο  $\Delta B\Gamma$  θα έχουμε:

$$\varphi = \hat{\Delta}\hat{B}\hat{\Gamma} + \hat{B}\hat{\Gamma}\hat{\Delta} = 80^\circ + 40^\circ = 120^\circ.$$

Επειδή είναι  $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$  έπεται ότι  $\theta = \hat{\Delta}\hat{B}\hat{\Gamma} = 40^\circ$ , ως εντός εναλλάξ γωνίες.

Επιπλέον έχουμε:

$$\omega = \hat{A}\hat{Z}\hat{\Gamma} = (\text{ως κατά κορυφή γωνίες})$$

$$= 90^\circ - \hat{Z}\hat{A}\hat{\Gamma} = (\text{γιατί } \hat{G}\hat{Z} \perp \hat{A}\hat{\Gamma})$$

$$= 90^\circ - 80^\circ = 10^\circ$$

Οι ευθείες  $BE$  και  $GZ$  δεν είναι παράλληλες, γιατί οι δύο εντός και επί τα αυτά γωνίες  $\varphi$  και  $\hat{A}\hat{\Gamma}\hat{Z}$  που σχηματίζουν τεμνόμενες από την  $A\Gamma$  έχουν άθροισμα  $\varphi + \hat{A}\hat{\Gamma}\hat{Z} = 120^\circ + 90^\circ = 210^\circ \neq 180^\circ$ .

(4) Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = 2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4} + \dots + \frac{2.001}{2.000},$$

$$B = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2.000}$$

Να βρείτε τον αριθμό  $A - B$ .

✓ 2001-2002

(1) Να υπολογίσετε τις αλγεβρικές παραστάσεις:

$$A = (2^{10} : 2^6)^2 - 3^{12} : (3^9 \cdot 3) + 5 \cdot (2^3 + 3^2)$$

$$B = 5 \cdot (2^3 - 1) + 8 \cdot (3^3 - 20) - 8 \cdot (5^2 - 15).$$

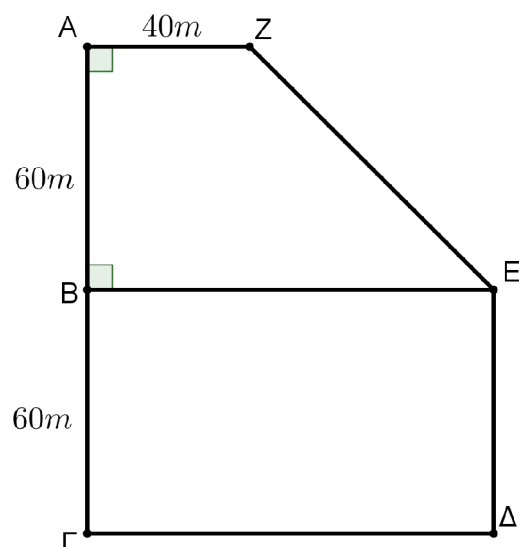
(2) Είναι γνωστό ότι το αλεύρι αυξάνει το βάρος του κατά το ζύμωμα κατά 50%, ενώ το ζυμάρι χάνει στο ψήσιμο το 20% του βάρους του.

Να βρείτε πόσα κιλά αλεύρι πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για την παραγωγή 840 κιλών ψωμιού.

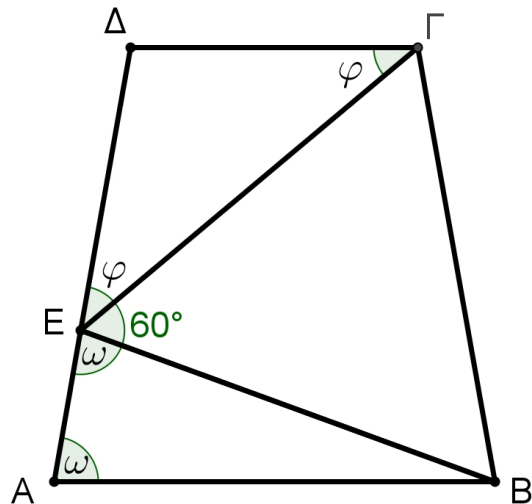
(3) Ο αγρός  $AB\Gamma\Delta EZ$  στο σχήμα αποτελείται από το τραπέζιο  $ABEZ$  με  $\hat{A} = 90^\circ$  και το ορθογώνιο  $B\Gamma\Delta E$  με  $AB = B\Gamma = 60$  m και  $AZ = 40$  m.

Το εμβαδόν του αγρού είναι  $10.200 \text{ m}^2$ .

Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς  $\Gamma\Delta$ .



- (4) Στο σχήμα το τετράπλευρο είναι τραπέζιο. Το τρίγωνο ΕΒΓ είναι ισόπλευρο και τα ΑΒΕ και ΓΔΕ ισοσκελή με  $BA = BE$  και  $\Delta\Gamma = \Delta E$ .  
 Να υπολογίσετε τη γωνία  $\widehat{B\Delta A} = \omega$ .



✓ 2002-2003

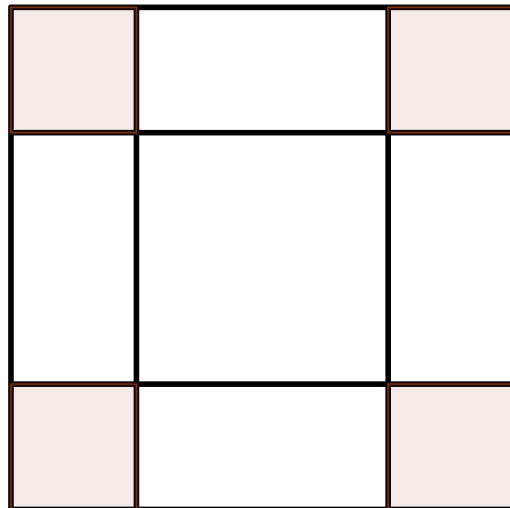
- (1) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$K = 2 \cdot 50 - 40 : 10 + 5 \cdot (100 - 4 \cdot 20)^2 - 92.$$

- (2) Ένα τετράγωνο πλευράς 4 διαιρείται με τέσσερις ευθείες παράλληλες ανά δύο προς τις πλευρές του σε σχήματα, έτσι ώστε τα τέσσερα γραμμοσκιασμένα από αυτά, όπως φαίνεται στο σχήμα, είναι τετράγωνα πλευράς 1.

Πόσα είναι τα τετράγωνα που υπάρχουν στο σχήμα και ποιο είναι το άθροισμα των εμβαδών τους;

✓



- (3) Δίνονται οι αριθμοί:  $A = 2^{41}$ ,  $B = 8^{13}$ ,  $\Gamma = 4^{21}$  και  $\Delta = 32^8$ .

(α) Να βρείτε ποιος από τους αριθμούς αυτούς είναι ο μεγαλύτερος.

(β) Να εκφράσετε το άθροισμα  $A + B + \Gamma + \Delta$  ως γινόμενο πρώτων παραγόντων.

- (4) Στις Δημοτικές εκλογές σε ένα Δήμο συμμετείχαν οι συνδυασμοί Α, Β και Γ. Ονομάζουμε  $n$  τον αριθμό των εγγεγραμμένων στους εκλογικούς καταλόγους ψηφοφόρων. Συνολικά ψήφισε το 75% του αριθμού  $n$  και όλα τα ψηφοδέλτια ήταν έγκυρα.

Ο συνδυασμός Α ψηφίστηκε από το 39% του αριθμού  $n$ , ενώ ο συνδυασμός Β ψηφίστηκε από το 27% του αριθμού  $n$ . Λευκά ψηφοδέλτια δεν βρέθηκαν.

(α) Να εξετάσετε αν ο αρχηγός του συνδυασμού Α εξελέγη Δήμαρχος, δηλαδή αν ο συνδυασμός του έλαβε ποσοστό μεγαλύτερο του 50% ως προς τον αριθμό των εγκύρων ψηφοδελτίων.

(β) Να βρείτε το ποσοστό των ψήφων του συνδυασμού Γ ως προς τον αριθμό των έγκυρων ψηφοδελτίων.

✓ 2003-2004

(1) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = 2.415 - 4 \cdot 10^2 + 2.003^0 - 2 \cdot 3^2 + 2$$

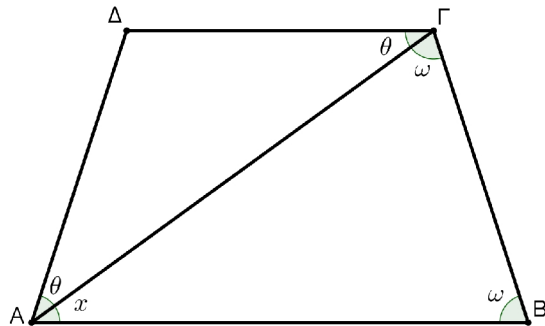
(2) Αν παρατάξουμε τους μαθητές ενός Γυμνασίου σε τριάδες περισσεύουν 2. Αν τους παρατάξουμε σε τετράδες ή σε πεντάδες επίσης περισσεύουν 2. Να προσδιορίσετε τον αριθμό των μαθητών, αν γνωρίζουμε ότι είναι τριψήφιος με άθροισμα ψηφίων 5.

(3) Στο τραπέζιο ΑΒΓΔ ( $AB \parallel \Gamma D$ )

του σχήματος δίνονται  $\hat{\Delta A B} = \hat{A \hat{B} \Gamma} = \hat{\omega}$  και ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΓΔ είναι ισοσκελή με  $AB = A\Gamma$  και  $\Delta A = \Delta \Gamma$ .

(α) Να αποδείξετε ότι η ΑΓ διχοτομεί τη γωνία  $\hat{\Delta A B}$ .

(β) Να υπολογίσετε τη γωνία  $\hat{\omega}$ .



(4) Η τιμή ενός προϊόντος αυξήθηκε το 2.001 (από 1-1-2001 μέχρι 31-12-2001) κατά 20%. Στη συνέχεια το 2.002 μειώθηκε κατά 10%, ενώ το 2003 αναμένεται αύξηση κατά 25%.

(α) Να προσδιορίσετε το ποσοστό επί τοις εκατό, της μεταβολής της τιμής του προϊόντος κατά την τριετία από 1-1-2001 μέχρι 31-12-2003.

(β) Αν η τιμή του προϊόντος ήταν 1,60 € την 1-1-2001, ποια θα είναι η τιμή του την 31-12-2003;

✓ 2004-2005

(1) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = 2^3 \cdot 5^3 + 2004 : 4 + (3^2 - 4) \cdot 100 + 3.$$

(2) Ένας τετραψήφιος αριθμός Κ έχει όλα τα ψηφία του ίσα και το άθροισμα των ψηφίων του είναι 20.

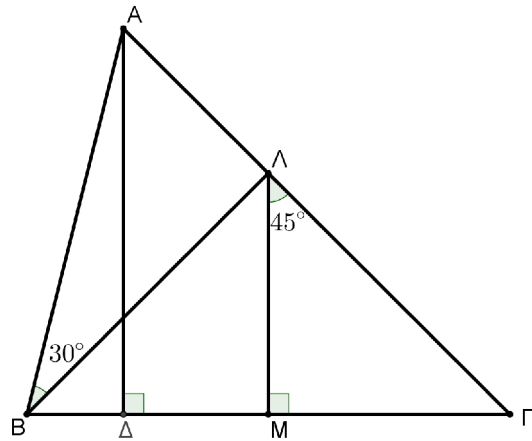
(α) Να βρείτε τον αριθμό Κ.

(β) Να βρείτε δεκαδικό αριθμό α και φυσικό αριθμό ν τέτοιους ώστε να ισχύει:  $K = a \cdot 10^v$ , με  $1 \leq a < 10$ .

- (3) Στο σχήμα η ευθεία ΜΛ είναι κάθετη προς την πλευρά ΒΓ στο μέσον Μ. Επιπλέον δίνονται:  $ΜΓ = 5 \text{ cm}$ ,  $Μ\hat{Λ}Γ = 45^\circ$ ,  $Α\hat{Β}Λ = 30^\circ$  και το εμβαδόν Ε του τριγώνου ΑΒΓ είναι ίσο με  $35\kappa \text{ cm}^2$ .

Να βρείτε:

- (α) Τις γωνίες  $\hat{Α}$ ,  $\hat{Β}$ ,  $\hat{Γ}$  του τριγώνου ΑΒΓ.  
 (β) Το ύψος ΑΔ του τριγώνου ΑΒΓ.



- (4) Η τιμή του πετρελαίου στη Ν. Υόρκη ένα χρόνο πριν στις 30/10/2003 ήταν 32 \$ το βαρέλι, ενώ σήμερα είναι 54,4 \$ το βαρέλι.  
 (α) Πόσο τοις εκατό έχει αυξηθεί η τιμή του βαρελιού σε σχέση με την τιμή που είχε ένα χρόνο πριν;  
 (β) Πόσα δολάρια πρέπει να μειωθεί η τιμή του βαρελιού μέχρι 30/11/2004 έτσι ώστε η τιμή που θα έχει τότε να είναι αυξημένη κατά 40% σε σχέση με την τιμή που είχε στις 30/10/2003;

✓ 2005-2006

(1) Να υπολογίσετε το 3,6% του αριθμού:  $A = \frac{3 + \frac{4,2}{0,1}}{\left(\frac{1}{0,3} - \frac{7}{3}\right) \cdot 0,3125}$ .

- (2) Ο Γιώργος πήγε στο βιβλιοπωλείο έχοντας 20 €. Στο μαγαζί υπάρχουν δύο είδη μολυβιών. Η εξάδα του πρώτου είδους κόστιζε 1,17 € ενώ η εξάδα του δεύτερου είδους κόστιζε 1,60 €.

Πόσες εξάδες κάθε κατηγορίες πρέπει ω' αγοράσει ο Γιώργος έτσι ώστε να πάρει τα λιγότερα ρέστα;

- (3) Για ποια ψηφία α και β διαιρείται δια του 45 ο αριθμός του οποίου η παράσταση στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης είναι 6α12β;

- (4) Έστω  $x\hat{O}y$  μια γωνία  $70^\circ$ , ΟΑ μια ημιευθεία που είναι κάθετος επί της Οx και ΟΒ μια ημιευθεία που είναι κάθετος επί της Οy.

Να υπολογίσετε τα μέτρα των γωνιών  $A\hat{O}B$ ,  $A\hat{O}y$  και  $B\hat{O}x$ .

✓ 2006-2007

- (1) Να υπολογίσετε την παράσταση:

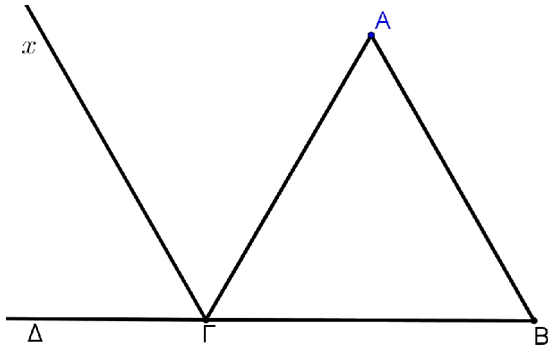
$$A = \left\{ 111 - \left[ 264 - \left( 15 + \frac{54}{6} \right) \cdot |-5| \right] : 12 \right\} : 11 + 1$$



$A = \left\{ 111 - \left[ 264 - \left( 15 + \frac{54}{6} \right) \cdot |-5| \right] : 12 \right\} : 11 + 1 =$  Είναι δυνατόν ένα χαρτονόμισμα των 100€ να ανταλλαγεί με 18 νομίσματα των 2 € και των 10 €;

(3) Το 6% του αριθμού  $a \neq 0$  είναι ίσο με το 4% του αριθμού  $\beta$ . Να βρείτε την τιμή του κλάσματος:  $\kappa = \frac{9a - 3\beta}{6a - \beta}$

(4) Στο παρακάτω σχήμα είναι  $AB = B\Gamma$  και η διχοτόμος  $\Gamma\chi$  της γωνίας  $A\hat{\Gamma}\Delta$  είναι παράλληλη στην  $AB$ . Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $AB\Gamma$ .



✓ 2007-2008

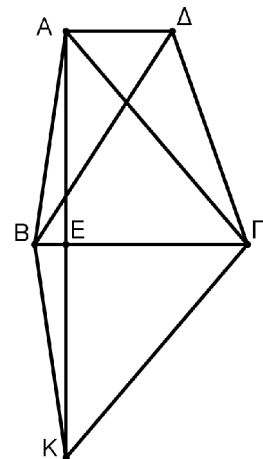
(1) Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A = (200 : 8 + 12 \cdot 100) + [200 : (8 + 2) + 762] \cdot [(-1)^{13} + (-1)^{12} + (-1)^{2007}]^2$$

(2) Οι μαθητές ενός Γυμνασίου μπορούν να παραταχθούν σε εξάδες, σε οκτάδες και σε δεκάδες, χωρίς να περισσεύει κανείς. Τα πλήθη των μαθητών των τάξεων  $A'$ ,  $B'$  και  $\Gamma'$  είναι αριθμοί ανάλογοι προς τους αριθμούς 5, 4 και 3, αντίστοιχα. Αν το πλήθος των μαθητών του Γυμνασίου είναι αριθμός μεγαλύτερος του 300 και μικρότερος του 400, να βρεθεί το πλήθος των μαθητών κάθε τάξεις.

(3) Ένας έμπορος αγόρασε 200 κιλά φράουλες με τιμή αγοράς 3 € το κιλό. Κατά τη μεταφορά είχε απώλεια 10% στα κιλά που αγόρασε. Πόσο πρέπει να πουλήσει το κιλό τις φράουλες ώστε να έχει κέρδος 20% επί της τιμής αγοράς.

(4) Στο τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  του διπλανού σχήματος η μεγάλη βάση  $B\Gamma$  είναι διπλάσια της μικρής βάσης  $A\Delta$ . Αν το εμβαδόν του τραπεζίου είναι  $300 \text{ cm}^2$  και το σημείο  $K$  είναι συμμετρικό του  $A$  ως προς την ευθεία  $B\Gamma$  (δηλαδή η  $B\Gamma$  είναι μεσοκάθετος της  $AK$ ), να υπολογίσετε:  
(α) το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Delta$  και  
(β) το εμβαδόν του τετραπλεύρου  $ABK\Gamma$

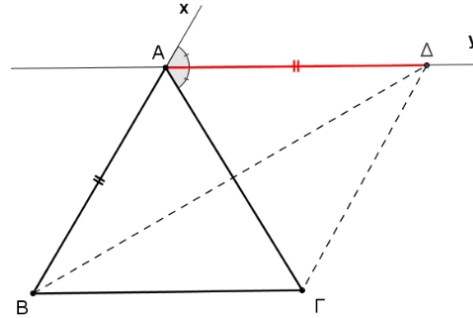


✓ 2008-2009

(1) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = 4^2 \cdot 25^2 + 2008 : 4 + (3^3 - 5^2) \cdot 249 - 10^4$$

(2) Στο διπλανό σχήμα η ευθεία  $Ay$  είναι παράλληλη προς την πλευρά  $B\Gamma$  του τριγώνου  $AB\Gamma$  και διχοτόμος της γωνίας  $\widehat{GAx}$ . Δίνεται ακόμη ότι:  $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = 62^\circ$  και  $AB = A\Delta$ .



(α) Να βρείτε τις γωνίες  $\widehat{B}$  και  $\widehat{\Gamma}$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

(β) Να εξηγήσετε γιατί η  $B\Delta$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\widehat{A\hat{B}\Gamma}$ .

(3) Αν για το θετικό ακέραιο αριθμό  $a$  ισχύει:  $\frac{21}{5} < \frac{42}{a} < \frac{21}{4}$ , να βρείτε τη τιμή της παράστασης:

$$A = a + 5(4 + a) + 3(a - 4) + 1919$$

(4) Ένα Γυμνάσιο συμμετέχει στην παρέλαση για την επέτειο μιας Εθνικής Εορτής με το 60% του αριθμού των αγοριών και το 80% του αριθμού των κοριτσιών του. Τα αγόρια που συμμετέχουν, αν παραταχθούν σε τριάδες, τότε δεν περισσεύει κανείς, ενώ, αν παραταχθούν σε πεντάδες ή επτάδες, τότε και στις δύο περιπτώσεις περισσεύουν από τρεις. Όλα τα αγόρια του Γυμνασίου είναι περισσότερα από 100 και λιγότερα από 200. Αν το 80% των κοριτσιών είναι αριθμός διπλάσιος από τον αριθμό που αντιστοιχεί στο 60% του αριθμού των αγοριών, να βρείτε το συνολικό αριθμό των κοριτσιών και αγοριών του Γυμνασίου.

✓ 2009-2010

(1) Αν  $a = 4 - 2\frac{1}{5}$  και  $\beta = 5 + \frac{-3}{2} - \frac{-5}{-2}$ , να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = a : \beta^{2009} - \beta - \frac{1}{5a}.$$

(2) Έστω  $a$  θετικός ακέραιος τον οποίο διαιρούμε με 4.

(α) Ποιες είναι οι δυνατές μορφές του παραπάνω θετικού ακέραιου  $a$ ;

(β) Ποιες είναι οι δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει ο αριθμός  $a$ , αν είναι περιττός μεγαλύτερος από 39 και μικρότερος από 50, και διαιρούμενος με το 4 δίνει υπόλοιπο 1.

- (3) Δίνεται ένα τρίγωνο ΑΒΓ του οποίου οι γωνίες  $\hat{B}$  και  $\hat{\Gamma}$  έχουν άθροισμα  $140^\circ$  και είναι ανάλογες με τους αριθμούς 1 και 6, αντίστοιχα.  
(α) Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου  
(β) Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζουν το ύψος και η διχοτόμος του τριγώνου ΑΒΓ που αντιστοιχούν στην πλευρά του ΒΓ.

- (4) Από τους μαθητές ενός Γυμνασίου, το  $\frac{1}{4}$  ασχολείται με το στίβο, το  $\frac{1}{5}$  ασχολείται με το μπάσκετ, το  $\frac{1}{8}$  ασχολείται με το βόλεϊ και περισσότεροι και 80 μαθητές που δεν ασχολούνται με κανένα από αυτά τα αθλήματα. Δεδομένου ότι οι μαθητές του Γυμνασίου οι ασχολούμενοι με τον αθλητισμό, ασχολούνται με ένα μόνο άθλημα, εκτός από 12 μαθητές που ασχολούνται και με το μπάσκετ και με το βόλεϊ, να βρείτε:  
(α) Ποιος είναι ο αριθμός των μαθητών του Γυμνασίου;  
(β) Πόσοι είναι οι μαθητές του Γυμνασίου που ασχολούνται μόνο με το μπάσκετ;

✓ 2010-2011

- (1) Έστω  $x = 3^2 - 4 \cdot 2^3 : 4 + 2^5$  και  $y = 4 \cdot 5^2 - 4^3 + 7 \cdot 3^2$ .  
(α) Να βρείτε τους αριθμούς x και y.  
(β) Να προσδιορίσετε το μεγαλύτερο θετικό ακέραιο Α, του οποίου οι αριθμοί x και y είναι πολλαπλάσια.
- (2) Έστω α, β φυσικοί αριθμοί. Δίνεται ότι η Ευκλείδεια διαίρεση με διαιρέτο τον α και διαιρέτη τον β δίνει πηλίκο 6. Να βρείτε τον αριθμό α, αν επιπλέον γνωρίζετε ότι ο α είναι πολλαπλάσιο του 7, ενώ ο αριθμός β είναι ο ΜΚΔ(16, 32, 248).
- (3) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Οι διχοτόμοι των γωνιών Β και Γ τέμνονται στο σημείο Ι. Η παράλληλη από το Ι προς την πλευρά ΑΒ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο Δ ενώ η παράλληλη από το Ι προς την πλευρά ΑΓ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Ε. Αν είναι  $\hat{\Delta\Gamma} = 70^\circ$  και  $\hat{Ε\Gamma} = 130^\circ$ , να βρείτε:  
(α) τη γωνία  $\hat{A}$  του τριγώνου ΑΒΓ.  
(β) τις γωνίες  $\hat{B\Delta}$  και  $\hat{Ε\Gamma}$ .
- (4) Ένας αγρότης καλλιέργησε δύο κτήματα με ελαιόδεντρα. Το ένα κτήμα είναι δικό του και έχει 80 ελαιόδεντρα, ενώ το άλλο το μισθώνει και έχει 120 ελαιόδεντρα. Η συνολική παραγωγή λαδιού ήταν 2.600 κιλά λάδι. Αν είχε συμφωνήσει να δώσει στον ιδιοκτήτη του μισθωμένου κτήματος το 10% της παραγωγής λαδιού του μισθωμένου κτήματος, πόσα κιλά λάδι θα πάρει ο ιδιοκτήτης του μισθωμένου κτήματος σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

(α) Καθένα από τα ελαιόδεντρα των δύο κτημάτων παράγει τα ίδια κιλά λάδι.

(β) Κάθε ελαιόδεντρο του μισθωμένου κτήματος έχει απόδοση σε λάδι ίση με το 150% της απόδοσης σε λάδι κάθε ελαιόδεντρου του κτήματος του αγρότη.

✓ 2011-2012

(1) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \left( \frac{2}{7} + 1 - \frac{1}{14} \right) : \frac{17}{2} - \frac{1}{7} + 5 \frac{1}{6} - \left( \frac{3}{2} + \frac{7}{3} \cdot 2 - 1 \right)$$

(2) Αν ο  $v$  είναι πρώτος φυσικός αριθμός και το κλάσμα  $\frac{10}{v}$  παριστάνει φυσικό αριθμό, να βρείτε όλες τις δυνατές τιμές της παράστασης:

$$B = \frac{2}{v - \frac{1}{5}} : \frac{v - \frac{v}{2}}{9}$$

(3) Τρεις αριθμοί  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  είναι ανάλογοι με τους αριθμούς 3, 9, 11 αντίστοιχα. Αν πάρουμε τον αριθμό  $\gamma$  ως μειωτέο και τον αριθμό  $\alpha$  ως αφαιρετέο, τότε προκύπτει διαφορά ίση με 56. Να βρεθούν οι αριθμοί  $\alpha$ ,  $\beta$  και  $\gamma$ .

(4) Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB < A\Gamma$  και η διχοτόμος του  $A\Delta$ . Προεκτείνουμε τη διχοτόμο  $A\Delta$  κατά ευθύγραμμο τμήμα  $\Delta H$  έτσι ώστε  $A\Delta = \Delta H$ . Από το σημείο  $H$  φέρνουμε ευθεία παράλληλη προς την πλευρά  $AB$  που τέμνει την πλευρά  $A\Gamma$  στο σημείο  $E$  και την πλευρά  $B\Gamma$  στο σημείο  $Z$ .

(α) Να αποδείξετε ότι:  $\hat{A}\hat{L}E = 90^\circ$

(β) Να βρείτε τη γωνία  $\hat{E}\hat{L}Z$ , αν γνωρίζετε ότι:  $\hat{B} - \hat{\Gamma} = 20^\circ$ .

✓ 2012-2013

(1) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \left( 18 - \frac{2}{5} \right) : \frac{44}{5} - \frac{39}{5} \cdot \left( \frac{\frac{5}{11}}{3 + \frac{6}{11}} \right)$$

(2) Αν ο  $\kappa$  είναι πρώτος θετικός ακέραιος και διαιρέτης του μέγιστου κοινού διαιρέτη των ακεραίων 12, 30 και 54, να βρείτε τις δυνατές τιμές του  $\kappa$  και της παράστασης:

$$B = \frac{2 - \frac{\kappa}{2}}{\kappa - \frac{1}{2}} : \frac{3 - \kappa}{\kappa}.$$

(3) Ένας ελαιοπαραγωγός έχει παραγωγή λαδιού 800 κιλά. Για την καλλιέργεια του ελαιώνα που ξόδεψε 407 € και για τη συγκομιδή του καρπού από τις ελιές του ξόδεψε 1.050 €. Η πώληση του λαδιού είναι 2,5 € το κιλό και κατά την πώληση του λαδιού υπάρχουν κρατήσεις σε ποσοστό 6% πάνω στην τιμή πώλησης.

(α) Να βρείτε πόσα κιλά λάδι πρέπει να πωλήσει ο παραγωγός για να καλύψει τα έξοδα του.

(β) Αν επιπλέον το ελαιοτριβείο (εργοστάσιο που παράγει το λάδι) κρατάει για την αμοιβή του το 8% του παραγόμενου λαδιού, να βρείτε πόσα κιλά λάδι θα μείνουν στον παραγωγό μετά την πώληση λαδιού για την κάλυψη των εξόδων του.

(4) Δίνεται τρίγωνο ABΓ με  $\hat{A} = 60^\circ$  και  $A\Gamma = \frac{3}{2} \cdot AB$ . Παίρνουμε σημείο

Ε πάνω στην πλευρά ΑΓ τέτοιο ώστε  $AE = AB$ . Αν η διχοτόμος της γωνίας  $\hat{A}$  τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα ΒΕ στο σημείο Δ, να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου ΔΕΓ.

✓ 2013-2014

(1) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = 32 - 12 : 4 + 53 + 3 \cdot 4 + \frac{16}{9} : \frac{1}{8} - \frac{74}{9}$$

(2) Ένας οικογενειάρχης πήρε από την τράπεζα ένα ποσό χρημάτων. Από αυτά ξόδεψε το 20% για την αγορά ενός φορητού ηλεκτρονικού υπολογιστή. Στη συνέχεια, από τα χρήματα που του έμειναν ξόδεψε το 15% για αγορά τροφίμων της οικογένεια. Αν του έμειναν τελικά 1.360 €, να βρείτε:

(α) Πόσα χρήματα πήρε από την τράπεζα ο οικογενειάρχης.

(β) Πόσα χρήματα σοίχησαν τα τρόφιμα.

(γ) Ποιο ποσοστό των χρημάτων που πήρε από την τράπεζα ξόδεψε συνολικά.

(3) Δίνεται τρίγωνο ABΓ στο οποίο η γωνία  $\hat{B}$  είναι διπλάσια της γωνίας  $\hat{\Gamma}$ . Η μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε και η ευθεία ΒΕ τέμνει την ευθεία ε, που περνάει από το σημείο Α και είναι παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ, στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι:

(α)  $AZ = AB$

(β)  $A\hat{E}B = \hat{B}$

- (4) Ο λόγος δυο φυσικών αριθμών είναι  $\frac{7}{5}$ . Διαιρώντας τον μεγαλύτερο αριθμό με το 18, το πηλίκο της διαίρεσης είναι ίσο με τον αριθμό 8, ενώ διαιρώντας τον μικρότερο αριθμό με το 12 το πηλίκο της διαίρεσης είναι ίσο με τον αριθμό 9. Αν γνωρίζετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του μεγαλύτερου αριθμού με το 18 είναι πενταπλάσιο του υπόλοιπου της διαίρεσης του μικρότερου αριθμού με το 12, να βρείτε τους δύο αριθμούς.