ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 9 ΙΟΥΝΙΟΥ 2017
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό x του Δ, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

Μονάδες 7

Απάντηση:

Απόδειξη, σχολικό βιβλίο σελίδα 135.

Α2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό: «Κάθε συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής στο x_0, είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.»

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

Μονάδα 1

Απάντηση:

Λάθος

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Μονάδες 3

Απάντηση:

Με αντιπαράδειγμα:

Η συνάρτηση $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ είναι συνεχής στο $x_o = 0$, αφού $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = 0$, όμως δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 0$ αφού $\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x-0}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{x} = 1$ και $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x-0}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x}{x} = -1$

Α3. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $\left[\alpha, \beta\right]$;

Μονάδες 4

<u>Απάντηση:</u>

Ορισμός, σχολικό βιβλίο σελίδα 25.

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=0$.

β) Αν f, g είναι δυο συναρτήσεις με πεδία ορισμού Α, Β αντίστοιχα, τότε η $g\circ f$ ορίζεται αν $f(A)\cap B\neq 0$.

γ) Για κάθε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που είναι παραγωγίσιμη και δεν παρουσιάζει ακρότατα, ισχύει $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

δ) Αν $0<\alpha<1$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\alpha^x=+\infty$.

ε) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

Μονάδες 10

<u>Απάντηση:</u>

α) Λάθος

β) Σωστό, σχολικό βιβλίο σελίδα 25

γ) Λάθος, σχολικό βιβλίο σελίδα 136

δ) Σωστό, σχολικό βιβλίο σελίδα 67

ε) Σωστό, σχολικό βιβλίο σελίδα 76.

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln x$, $x>0$ και $g(x)=\dfrac{x}{x-1}$, $x\neq 1$.

Β1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f\circ g$.

Μονάδες 5

Λύση:

Η συνάρτηση $f(x)=\ln x$ έχει πεδίο ορισμού $A_f=(0,+\infty)$ και η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{x}{x-1}$ έχει πεδίο ορισμού $A_g=\mathbb{R}-\{1\}$. Η συνάρτηση $f\circ g$ ορίζετε αν και μόνο αν το σύνολο $\{x\in A_g \text{ και } g(x)\in A_f\}\neq\varnothing$ το οποίο θα είναι και το πεδίο ορισμού της $f\circ g$.

Όμως $\{x\in A_g \text{ και } g(x)\in A_f\}=\{x\in\mathbb{R}-\{1\} \text{ και } g(x)\in(0,+\infty)\}=$

$=\{x\neq 1 \text{ και } g(x)>0\}=\left\{x\neq 1 \text{ και } \dfrac{x}{1-x}>0\right\}=\{x\neq 1 \text{ και } x(1-x)>0\}=$

$=\{x\neq 1 \text{ και } 0<x<1\}=(0,1)\neq\varnothing$

Αφού $x(1-x)=0\Rightarrow x=0$ ή $1-x=0\Rightarrow x=0$ ή $x=1$ και το τριώνυμο $x(1-x)=x-x^2=-x^2+x$ είναι θετικό μεταξύ των ριζών καθότι $\alpha=-1<0$.

Συνεπώς η συνάρτηση σύνθεση $f\circ g$ ορίζεται και έχει πεδίο ορισμού $A_{f\circ g}=(0,1)$.

Ο δε τύπος της συνάρτησης σύνθεση $f\circ g$ δίνεται από τη συνάρτηση:

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\ln g(x)=\ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$.

Β2. Αν $h(x)=(f\circ g)(x)=\ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$, $x\in(0,1)$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη της.

Μονάδες 6

Λύση:

Έστω $x_1, x_2\in(0,1)$ με:

$$h(x_1)=h(x_2)\Rightarrow \ln\left(\frac{x_1}{1-x_1}\right)=\ln\left(\frac{x_2}{1-x_2}\right)\Rightarrow \frac{x_1}{1-x_1}=\frac{x_2}{1-x_2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1(1-x_2)=x_2(1-x_1)\Rightarrow x_1-x_1x_2=x_2-x_1x_2\Rightarrow x_1=x_2$$

Άρα η συνάρτηση h είναι 1-1, συνεπώς αντιστρέφεται.

Είναι:

$$h(x)=y\Leftrightarrow \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)=y\Leftrightarrow e^y=\frac{x}{1-x}\Leftrightarrow x=e^y(1-x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=e^y-xe^y\Leftrightarrow x+xe^y=e^y\Leftrightarrow (1+e^y)x=e^y\Leftrightarrow x=\frac{e^y}{1+e^y}$$

Έτσι η αντίστροφη συνάρτηση είναι η $h^{-1}:\mathbb{R}\to(0,1)$ με $h^{-1}(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}$.

Β3. Αν $\phi(x)=h^{-1}(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$, $x\in(0,1)$, να μελετήσετε τη συνάρτηση ϕ ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 7

<u>Λύση:</u>

Η συνάρτηση $\phi(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$, $x\in\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$\phi'(x)=\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)'=\frac{(e^x)'(e^x+1)-e^x(e^x+1)'}{(e^x+1)^2}=\frac{e^x(e^x+1)-e^x\cdot e^x}{(e^x+1)^2}=$$

$$=\frac{e^{2x}+e^x-e^{2x}}{(e^x+1)^2}=\frac{e^x}{(e^x+1)^2}>0$$, επομένως είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και δεν έχει ακρότατα.

Επίσης η συνάρτηση $\phi'(x)=\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$, $x\in\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$\varphi''(x)=\left[\frac{e^x}{(e^x+1)^2}\right]'=\frac{(e^x)'(e^x+1)^2-e^x\left[(e^x+1)^2\right]'}{\left[(e^x+1)^2\right]^2}=$$

$$=\frac{e^x(e^x+1)^2-e^x\cdot 2(e^x+1)\cdot(e^x+1)'}{(e^x+1)^4}=\frac{e^x(e^x+1)^2-e^x\cdot 2(e^x+1)\cdot e^x}{(e^x+1)^4}=$$

$$=\frac{e^x(e^x+1)^2-2e^{2x}(e^x+1)}{(e^x+1)^4}=\frac{e^x(e^x+1)\left[e^x+1-2e^x\right]}{(e^x+1)^4}=$$

$$=\frac{e^x\cancel{(e^x+1)}(1-e^x)}{(e^x+1)^{\cancel{4}\,3}}=\frac{e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}.$$

Όμως $\frac{e^x}{(e^x+1)^3}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, συνεπώς το πρόσημο της $\varphi''(x)$ εξαρτάται από τον παράγοντα $1-e^x$.

Έτσι:

$1-e^x=0\Leftrightarrow e^x=1\Leftrightarrow e^x=e^0\Leftrightarrow x=0$

$1-e^x>0\Leftrightarrow e^x>1\Leftrightarrow e^x>e^0\Leftrightarrow x>0$

$1-e^x<0\Leftrightarrow e^x<1\Leftrightarrow e^x<e^0\Leftrightarrow x<0$

Άρα η φ είναι κυρτή στο $(-\infty,0]$, κοίλη στο $[0,+\infty)$ και στο σημείο με τετμημένη 0 έχουμε σημείο καμπής.

$$\varphi(0)=\frac{e^0}{e^0+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

Άρα το σημείο $A(0,\varphi(0))$ ή $A\left(0,\frac{1}{2}\right)$ είναι σημείο καμπής της συνάρτησης φ.

B4. Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ και να τη σχεδιάσετε.

(Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό)

Μονάδες 7

Λύση:

$$\lim_{x\to-\infty}\phi(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{0}{0+1}=\frac{0}{1}=0$$

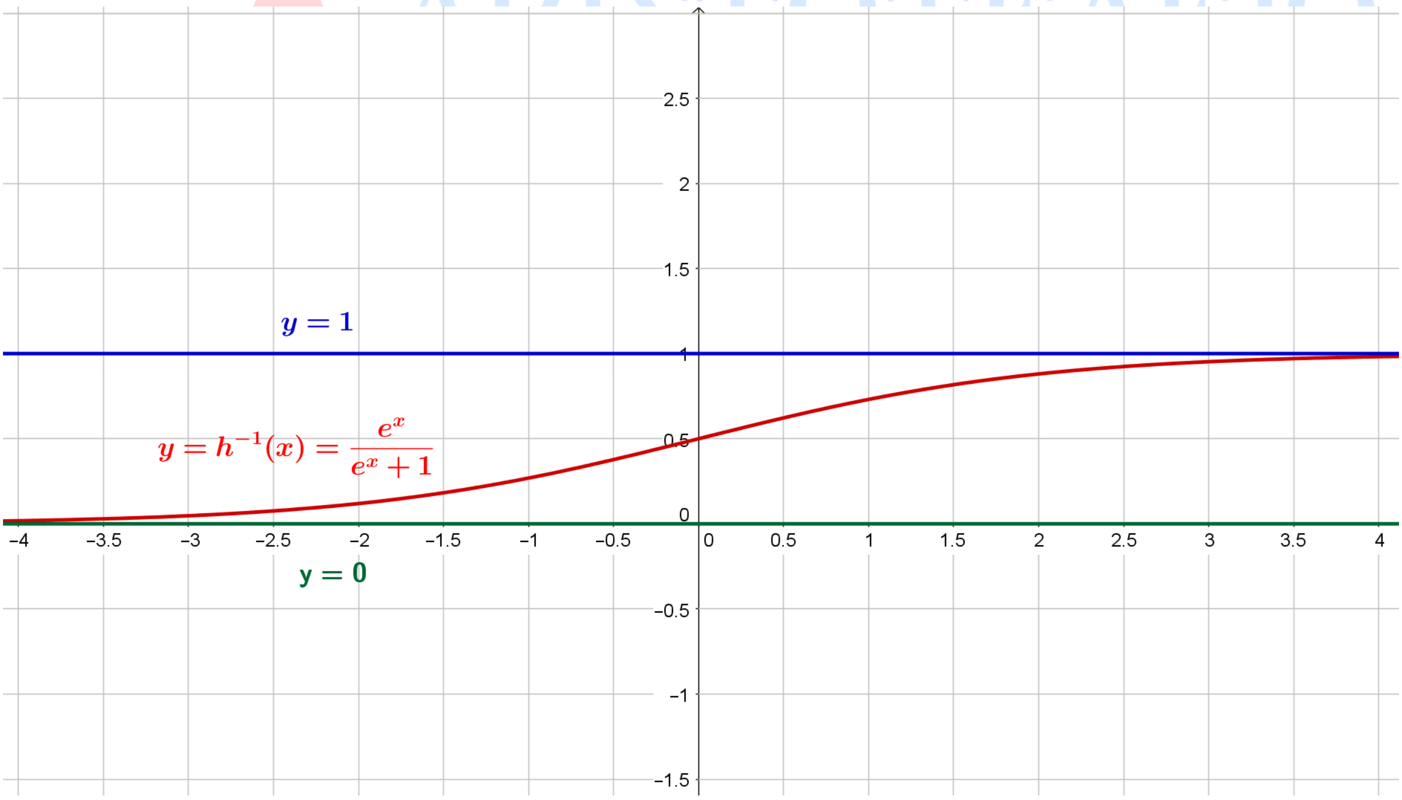
Άρα η ευθεία $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της ϕ στο $-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}\phi(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+1}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^x\right)'}{\left(e^x+1\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x}=1$$

Εφαρμόζουμε τον κανόνα De l' Hospital γιατί οι συναρτήσεις e^x και e^x+1 είναι παραγωγίσιμες και $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x+1\right)=+\infty$.

Επομένως η ευθεία $y=1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της ϕ στο $+\infty$.

Έτσι η γραφική παράσταση είναι:



ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-\eta\mu x$, $x\in[0,\pi]$ και το σημείο $A\left(\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right)$

Γ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο εφαπτομένες (ε_1), (ε_2) της γραφικής παράστασης της f που άγονται από το Α, τις οποίες να βρείτε.

Μονάδες 8

<u>Λύση:</u>

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη οπότε ορίζεται εφαπτομένη της γραφικής παράστασής της σε ένα οποιοδήποτε σημείο της $M(x_o, f(x_o))$ με $x_o \in [0, \pi]$, η οποία έχει εξίσωση $y - f(x_o) = f'(x_o)(x - x_o) \Rightarrow$

$\Rightarrow y + \eta\mu x_o = -\sigma\upsilon\nu x_o(x - x_o)$.

Η εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο $A\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$, άρα:

$$-\frac{\pi}{2} + \eta\mu x_o = -\sigma\upsilon\nu x_o\left(\frac{\pi}{2} - x_o\right) \Rightarrow -\frac{\pi}{2} + \eta\mu x_o = -\frac{\pi}{2}\sigma\upsilon\nu x_o + x_o\sigma\upsilon\nu x_o \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\pi + 2\eta\mu x_o = -\pi\sigma\upsilon\nu x_o + 2x_o\sigma\upsilon\nu x_o \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\pi + 2\eta\mu x_o + \pi\sigma\upsilon\nu x_o - 2x_o\sigma\upsilon\nu x_o = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\eta\mu x_o - 2x_o\sigma\upsilon\nu x_o + \pi\sigma\upsilon\nu x_o - \pi = 0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση g με $g(x) = 2\eta\mu x - 2x\sigma\upsilon\nu x + \pi\sigma\upsilon\nu x - \pi$ και πεδίο ορισμού της το διάστημα $[0, \pi]$.

Η συνάρτηση g είναι συνεχής, ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών, στο $[0, \pi]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, \pi)$ με:

$$g'(x) = (2\eta\mu x - 2x\sigma\upsilon\nu x + \pi\sigma\upsilon\nu x - \pi)' =$$

$$= 2\sigma\upsilon\nu x - \left[(2x)'\sigma\upsilon\nu x + 2x(\sigma\upsilon\nu x)'\right] + \pi(\sigma\upsilon\nu x)' =$$

$$= 2\sigma\upsilon\nu x - \left[2\sigma\upsilon\nu x + 2x(-\eta\mu x)\right] + \pi(-\eta\mu x) =$$

$$= 2\sigma\upsilon\nu x - (2\sigma\upsilon\nu x - 2x\eta\mu x) - \pi\eta\mu x =$$

$$= 2\sigma\upsilon\nu x - 2\sigma\upsilon\nu x + 2x\eta\mu x - \pi\eta\mu x =$$

$$= 2x\eta\mu x - \pi\eta\mu x = (2x - \pi)\eta\mu x.$$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow (2x-\pi)\eta\mu x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}$ αφού $\eta\mu x>0$ για κάθε $x\in(0,\pi)$.

Επίσης:

για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, $g'(x)<0$ άρα γνησίως φθίνουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

για κάθε $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, $g'(x)>0$ άρα γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Οπότε

στο διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ είναι $g\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)=\left[g\left(\frac{\pi}{2}\right),g(0)\right]=[2-\pi,0]$

στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ είναι $g\left(\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]\right)=\left[g\left(\frac{\pi}{2}\right),g(\pi)\right]=[2-\pi,0]$

Άρα οι μοναδικές ρίζες της g στο διάστημα $[0,\pi]$ είναι: $x=0$ ή $x=\pi$

Έτσι,

αν $x_o=0$, τότε $(\varepsilon_1): y=-x$ και

αν $x_o=\pi$, τότε $(\varepsilon_2): y=x-\pi$.

Γ2. Αν $(\varepsilon_1): y=-x$ και $(\varepsilon_2): y=x-\pi$ είναι οι ευθείες του ερωτήματος Γ1, τότε να σχεδιάσετε τις (ε_1), (ε_2) και τη γραφική παράσταση της f και να αποδείξετε ότι $\frac{E_1}{E_2}=\frac{\pi^2}{8}-1$ όπου:

- Ε1 είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τις ευθείες (ε_1), (ε_2) και

- E2 είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 6

<u>Λύση:</u>

Α' τρόπος

Η τομή των ευθειών ε_1 και ε_2 είναι το σημείο $A\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$.

Για τη συνάρτηση $f(x) = -\eta\mu x$ έχουμε:

$f'(x) = (-\eta\mu x)' = -\sigma\upsilon\nu x$ και $f''(x) = (-\sigma\upsilon\nu x)' = \eta\mu x > 0$ για $x \in (0, \pi)$, οπότε f κυρτή στο διάστημα $[0, \pi]$ επομένως η C_f βρίσκεται πάνω από τις ε_1 και ε_2 με εξαίρεση τα σημεία επαφής αντίστοιχα.

Άρα

$f(x) \geq -x \Leftrightarrow f(x) + x \geq 0$ για $x \in (0, \pi)$.

$f(x) \geq x - \pi \Leftrightarrow f(x) - x + \pi \geq 0$ για $x \in (0, \pi)$.

$$E_1 = \int_0^{\pi}\left[f(x) + x\right]dx + \int_0^{\pi}\left[f(x) - x + \pi\right]dx = \int_0^{\pi}(-\eta\mu x + x)dx + \int_0^{\pi}(-\eta\mu x - x + \pi)dx =$$

$$= \left[\sigma\upsilon\nu x + \frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\sigma\upsilon\nu x - \frac{x^2}{2} + \pi x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} =$$

$$= \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} + \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{2} - \sigma\upsilon\nu 0 - \frac{0^2}{2} + \sigma\upsilon\nu\pi - \frac{\pi^2}{2} + \pi^2 - \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} + \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{2} - \pi\cdot\frac{\pi}{2} =$$

$$= 0 + \frac{\frac{\pi^2}{4}}{2} - 1 - 0 + -1 - \frac{\pi^2}{2} + \pi^2 - 0 + \frac{\frac{\pi^2}{4}}{2} - \frac{\pi^2}{2} =$$

$$= \frac{\pi^2}{8} - 1 - 1 - \frac{\pi^2}{2} + \pi^2 + \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{2} = \frac{2\pi^2}{8} - 2 - \frac{2\pi^2}{2} + \pi^2 =$$

$$= \frac{\pi^2}{4} - 2 - \cancel{\pi^2} + \cancel{\pi^2} = \frac{\pi^2}{4} - 2$$

$$E_2 = \int_0^{\pi} -f(x)\,dx = \int_0^{\pi}\eta\mu x dx = \left[-\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi} = -\sigma\upsilon\nu\pi + \sigma\upsilon\nu 0 = -(-1) + 1 =$$

$$= 1 + 1 = 2$$

Έτσι:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\frac{\pi^2 - 8}{4}}{2} = \frac{\pi^2 - 8}{8} = \frac{\pi^2}{8} - 1$$

Γ3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{f(x) + x}{f(x) - x + \pi}$

Μονάδες 4

<u>Λύση:</u>

Έστω $\phi(x) = -\eta\mu x - x + \pi$, $x \in (0, \pi)$.

Είναι $\phi'(x) = (-\eta\mu x - x + \pi)' = -\sigma\upsilon\nu x - 1 < 0$, $x \in (0, \pi)$ άρα η συνάρτηση ϕ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, \pi)$, οπότε θα έχει σύνολο τιμών το

$$\phi((0, \pi)) = \left(\lim_{x\to\pi^-} \phi(x), \lim_{x\to 0^+} \phi(x)\right) =$$

$$= \left(\lim_{x\to\pi^-} (-\eta\mu x - x + \pi), \lim_{x\to 0^+} (-\eta\mu x - x + \pi)\right) = (0, \pi)$$

Δηλαδή θα παίρνει θετικές τιμές. Επομένως:

$$\lim_{x\to\pi} \frac{f(x) + x}{f(x) - x + \pi} = \lim_{x\to\pi} \frac{-\eta\mu x + \pi}{-\eta\mu x - x + \pi} = \lim_{x\to\pi} (-\eta\mu x + \pi) \cdot \lim_{x\to\pi} \frac{1}{-\eta\mu x - x + \pi} =$$

$$= \pi \cdot \left(\frac{1}{0^+}\right) = \pi \cdot (+\infty) = +\infty$$

Γ4. Να αποδείξετε ότι $\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx > e - 1 - \pi$

Μονάδες 7

<u>Λύση:</u>

Η συνάρτηση $\phi(x) = f(x) - x + \pi$ όπως αναφέρθηκε στο Γ3 είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, e] \subseteq [0, \pi]$ και αφού $\phi(e) = -\eta\mu e - 1 + \pi > 0$ θα είναι $\phi(x) > 0$ στο διάστημα $[1, e]$.

Δηλαδή $f(x) - x + \pi > 0 \Rightarrow \frac{f(x)}{x} - 1 + \frac{\pi}{x} > 0$ και άρα,

$$\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx - \int_1^e dx + \pi\int_1^e \frac{1}{x}dx > 0$$

Οπότε

$$\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx > \int_1^e dx - \pi\int_1^e \frac{1}{x}dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_1^e \frac{f(x)}{x}dx > (e-1) - \pi\left[\ln x\right]_1^e \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_1^e \frac{f(x)}{x}dx > e-1-\pi(1-0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_1^e \frac{f(x)}{x}dx > e-1-\pi.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^4}, & x \in [-1, 0) \\ e^x \cdot \eta\mu x, & x \in [0, \pi] \end{cases}$

Δ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[-1, \pi]$ και να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της.

Μονάδες 8

Λύση:

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = [-1, \pi]$.

Η f είναι συνεχής στο $[-1, 0)$ και στο $(0, \pi]$ αφού προκύπτει από σύνθεση συνεχών και από γινόμενο συνεχών συναρτήσεων αντίστοιχα.

Επίσης $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \sqrt[3]{x^4} = 0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} e^x \eta\mu x = e^0 \cdot \eta\mu 0 = 0$ και $f(0) = 0$.

Οπότε $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$ επομένως η f είναι συνεχής και στο 0. Άρα τελικά η f είναι συνεχής στο Α.

Κρίσιμα σημεία της f (εσωτερικά σημεία του Α που η f' δεν υπάρχει ή μηδενίζεται).

Για $-1 \le x \le 0$ είναι $f(x) = \sqrt[3]{x^4} = \sqrt[3]{(-x)^4} = (-x)^{\frac{4}{3}}$ και η f είναι παραγωγίσιμη με:

$$f'(x) = \left[(-x)^{\frac{4}{3}}\right]' = \frac{4}{3}(-x)^{\frac{4}{3}-1}(-x)' = \frac{4}{3}(-x)^{\frac{1}{3}}(-1) = -\frac{4}{3}\sqrt[3]{-x} < 0$$

Για $0 < x \le \pi$ η f είναι παραγωγίσιμη με:

$$f'(x) = (e^x ημx)' = (e^x)' ημx + e^x (ημx)' = e^x ημx + e^x συνx = e^x (ημx + συνx)$$

Επίσης

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{(-x)^{\frac{4}{3}}}{x} = \lim_{x\to 0^-}\left[-\frac{(-x)^{\frac{4}{3}}}{-x}\right] = \lim_{x\to 0^-}\left[-(-x)^{\frac{4}{3}-1}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0^-}\left[-(-x)^{\frac{1}{3}}\right] = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x ημx - 0}{x} = \lim_{x\to 0^+} e^x \frac{ημx}{x} = 1 \cdot 1 = 1$$

Συνεπώς η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0. Άρα το 0 είναι κρίσιμο σημείο της f.

Τώρα θα βρούμε τα σημείο που μηδενίζεται η f'.

Αν $-1 < x < 0$ είναι $f'(x) < 0$.

Για $0 < x < \pi$ είναι

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x (ημx + συνx) = 0 \overset{e^x \neq 0}{\Leftrightarrow} ημx + συνx = 0 \Leftrightarrow ημx = -συνx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{ημx}{συνx} = -1 \Leftrightarrow εφx = -1 \Leftrightarrow εφx = -εφ\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow εφx = εφ\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow εφx = εφ\frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4}$$

($συνx \neq 0$ γιατί αν $συνx = 0$ θα ήταν και $ημx = 0$ το οποίο αντιβαίνει στη βασική τριγωνομετρική ταυτότητα $ημ^2x + συν^2x = 1$)

Συνεπώς τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης f είναι το 0 και το $\frac{3\pi}{4}$.

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 6

<u>Λύση:</u>

Αν $-1 < x < 0$ είναι $f'(x) < 0$ και η f συνεχής στο 0 άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1, 0]$.

Για $0 < x < \frac{3\pi}{4}$ είναι:

$$f'(x) = e^x(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) = \sqrt{2}e^x\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\eta\mu x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma\upsilon\nu x\right) =$$

$$= \sqrt{2}e^x\left(\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} + \eta\mu\frac{\pi}{4}\sigma\upsilon\nu x\right) = \sqrt{2}e^x\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

Οπότε:

Για $0 < x < \frac{3\pi}{4}$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4} < x + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \Rightarrow \eta\mu\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > 0$$

Έτσι $f'(x) \overset{\sqrt{2}e^x>0}{=} \sqrt{2}e^x\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > 0$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{3\pi}{4}\right)$.

Η f είναι συνεχής στο διάστημα $\left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$ οπότε είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$.

Για $\frac{3\pi}{4} < x < \pi$

$$\Rightarrow \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4} < x + \frac{\pi}{4} < \pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow \pi < x + \frac{\pi}{4} < \frac{5\pi}{4} \Rightarrow \eta\mu\left(x + \frac{\pi}{4}\right) < 0$$

Έτσι $f'(x) \overset{\sqrt{2}e^x>0}{=} \sqrt{2}e^x\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{4}\right) < 0$ για κάθε $x \in \left(\frac{3\pi}{4}, 0\right)$.

Η f είναι συνεχής στο διάστημα $\left[\frac{3\pi}{4},0\right]$ οπότε είναι γνησίως στο διάστημα $\left[0,\frac{3\pi}{4}\right]$.

Τελικά η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο -1 το $f(-1)=\sqrt[3]{(-1)^4}=\sqrt[3]{1}=1$, τοπικό ελάχιστο στο 0 το $f(0)=e^0\eta\mu 0=1\cdot 0=0$, τοπικό μέγιστο στο $\frac{3\pi}{4}$ το $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=e^{\frac{3\pi}{4}}\cdot\eta\mu\frac{3\pi}{4}=e^{\frac{3\pi}{4}}\cdot\eta\mu\frac{4\pi-\pi}{4}=e^{\frac{3\pi}{4}}\cdot\eta\mu\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=e^{\frac{3\pi}{4}}\cdot\eta\mu\frac{\pi}{4}=$ $=e^{\frac{3\pi}{4}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$ και τέλος τοπικό ελάχιστο στο π το $f(\pi)=e^{\pi}\cdot\eta\mu\pi=e^{\pi}\cdot 0=0$.

Για το σύνολο τιμών:

Η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $A_1=[-1,0]$ άρα $f(A_1)=[f(0),f(-1)]=[0,1]$

Η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $A_2=\left[0,\frac{3\pi}{4}\right]$ άρα

$$f(A_2)=\left[f(0),f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]=\left[0,\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}\right]$$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $A_3=\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$ άρα

$$f(A_3)=\left[f(\pi),f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]=\left[0,\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}\right]$$

Τελικά, το σύνολο τιμών της f είναι το

$$f(A)=f(A_1)\cup f(A_2)\cup f(A_3)=\left[0,\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}\right],$$

αφού $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}>1\Leftrightarrow\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}}>2\Leftrightarrow e^{\frac{3\pi}{4}}>\frac{2}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow e^{\frac{3\pi}{4}}>\frac{2\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow e^{\frac{3\pi}{4}}>\sqrt{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(e^{\frac{3\pi}{4}}\right)^4 > \left(\sqrt{2}\right)^4 \Leftrightarrow e^{3\pi} > 2^2 \Leftrightarrow \ln e^{3\pi} > \ln 4 \Leftrightarrow 3\pi > \ln 4$ (ισχύει, γιατί $\pi > 3 \Leftrightarrow 3\pi > 9$ (1) και $2 < e \Leftrightarrow 4 < e^2 \Leftrightarrow \ln 4 < \ln e^2 \Leftrightarrow \ln 4 < 2$ (2), οπότε από (1) και (2): $3\pi > 9 > 2 > \ln 4$)

Δ3. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τη γραφική παράσταση της g, με $g(x) = e^{5x}$, $x \in \mathbb{R}$ τον άξονα y'y και την ευθεία $x = \pi$.

Μονάδες 6

Λύση:

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι το $E = \int_0^\pi |f(x) - g(x)|dx = \int_0^\pi e^x |\eta\mu x - e^{4x}|dx$

Για κάθε $x \in [0, \pi]$ ισχύει $\begin{cases} \eta\mu x \le 1 \\ e^{4x} \ge 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \eta\mu x \le 1 \\ -e^{4x} \le -1 \end{cases} \Rightarrow \eta\mu x - e^{4x} \le 0$

Άρα τελικά:

$$E = \int_0^\pi e^x |\eta\mu x - e^{4x}|dx = \int_0^\pi e^x \left(e^{4x} - \eta\mu x\right)dx = \int_0^\pi \left(e^{5x} - e^x\eta\mu x\right)dx =$$

$$= \int_0^\pi e^{5x}dx - \int_0^\pi e^x\eta\mu x = I_1 - I_2$$

Όπου

$$I_1 = \int_0^\pi e^{5x}dx = \left[\frac{e^{5x}}{5}\right]_0^\pi = \frac{e^{5\pi}}{5} - \frac{e^{5\cdot 0}}{5} = \frac{e^{5\pi}}{5} - \frac{e^0}{5} = \frac{e^{5\pi}}{5} - \frac{1}{5} = \frac{e^{5\pi} - 1}{5}$$

$$I_2 = \int_0^\pi e^x\eta\mu x dx$$

$$I_2 = \int_0^\pi \left(e^x\right)' \eta\mu x dx$$

$$I_2 = \left[e^x\eta\mu x\right]_0^\pi - \int_0^\pi e^x \left(\eta\mu x\right)' dx$$

$$I_2 = e^\pi\eta\mu\pi - e^0\eta\mu 0 - \int_0^\pi e^x\sigma\upsilon\nu x dx$$

$$I_2 = e^\pi \cdot 0 - 1 \cdot 0 - \int_0^\pi \left(e^x\right)' \sigma\upsilon\nu x dx$$

$$I_2 = e^{\pi}\cdot 0 - 1\cdot 0 - \int_0^{\pi}\left(e^x\right)' \sigma\upsilon\nu x dx$$

$$I_2 = -\left[\left[e^x \sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x\left(\sigma\upsilon\nu x\right)' dx\right]$$

$$I_2 = -\left(e^{\pi}\sigma\upsilon\nu\pi - e^0\sigma\upsilon\nu 0 - \int_0^{\pi} e^x\left(-\eta\mu x\right)dx\right)$$

$$I_2 = -\left[e^{\pi}\left(-1\right) - 1\cdot 1 + \int_0^{\pi} e^x \eta\mu x dx\right]$$

$$I_2 = -\left(-e^{\pi} - 1 + I_2\right)$$

$$I_2 = e^{\pi} + 1 - I_2$$

$$2I_2 = e^{\pi} + 1$$

$$\frac{2I_2}{2} = \frac{e^{\pi}+1}{2}$$

$$I_2 = \frac{e^{\pi}+1}{2}$$

Συνεπώς $E = I_1 - I_2 = \frac{e^{5\pi}-1}{5} - \frac{e^{\pi}+1}{2} = \frac{2\left(e^{5\pi}-1\right)}{10} - \frac{5\left(e^{\pi}+1\right)}{10} =$

$$= \frac{2e^{5\pi} - 2 - 5e^{\pi} - 5}{10} = \frac{1}{10}\left(2e^{5\pi} - 5e^{\pi} - 7\right)$$

Δ4. Να λύσετε την εξίσωση $16\cdot e^{-\frac{3\pi}{4}}\cdot f\left(x\right) - e^{-\frac{3\pi}{4}}\cdot\left(4x-3\pi\right)^2 = 8\sqrt{2}$.

Μονάδες 8

<u>Λύση:</u>

$$16\cdot e^{-\frac{3\pi}{4}}\cdot f\left(x\right) - e^{-\frac{3\pi}{4}}\cdot\left(4x-3\pi\right)^2 = 8\sqrt{2}$$

$$16\cdot e^{-\frac{3\pi}{4}}\cdot f\left(x\right) - e^{-\frac{3\pi}{4}}\cdot\left(4x-3\pi\right)^2 = 8\sqrt{2}$$

$$\frac{16\cdot e^{-\frac{3\pi}{4}}\cdot f\left(x\right) - e^{-\frac{3\pi}{4}}\cdot\left(4x-3\pi\right)^2}{16\cdot e^{-\frac{3\pi}{4}}} = \frac{8\sqrt{2}}{16\cdot e^{-\frac{3\pi}{4}}}$$

$$\frac{16\cdot e^{-\frac{3\pi}{4}}\cdot f\left(x\right)}{16\cdot e^{-\frac{3\pi}{4}}} - \frac{e^{-\frac{3\pi}{4}}\cdot\left(4x-3\pi\right)^2}{16\cdot e^{-\frac{3\pi}{4}}} = \frac{\sqrt{2}}{2\cdot e^{-\frac{3\pi}{4}}}$$

$$f(x)-\frac{(4x-3\pi)^2}{16}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot e^{\frac{3\pi}{4}}$$

$$f(x)-\left(\frac{4x}{4}-\frac{3\pi}{4}\right)^2=f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$f(x)-\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)^2=f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$f(x)-f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)^2 \ (1)$$

$$\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)^2\geq 0 \Leftrightarrow f(x)-f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\geq 0 \Leftrightarrow f(x)\geq f\left(\frac{3\pi}{4}\right) \ (2)$$

Όμως για κάθε $x\in[-1,\pi]$, $f(x)\leq f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ (3)

Από (2) και (3) συμπεραίνουμε ότι $f(x)=f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ (4)

Από (1) και (4) συμπεραίνουμε ότι $\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)^2=0\Leftrightarrow x-\frac{3\pi}{4}=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \boxed{x=\frac{3\pi}{4}}$$

Η επιμέλεια έγινε από τον μαθηματικό Θεολόγου Απόστολο με χρήσιμες παρατηρήσεις και διορθώσεις από τους μαθηματικούς Ανδρικάκη Σάκη και Καρβούνη Δημήτρη.