ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΔΕΥΤΕΡΑ 27 ΜΑΪΟΥ 2013 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε να αποδείξετε ότι:

$$\int_\alpha^\beta f(t)\,dt = G(\beta) - G(\alpha)$$

Μονάδες 7

Α2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού (Θ.Μ.Τ.)

Μονάδες 4

Α3. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Η εξίσωση $|z - z_0| = \rho$, $\rho>0$ παριστάνει τον κύκλο με κέντρο το σημείο $K(z_0)$ και ακτίνα ρ^2, όπου z, z_0 μιγαδικοί αριθμοί.

β) Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0

γ) Ισχύει ότι: $|\eta\mu x| \le |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

δ) Ισχύει ότι: $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 1$

ε) Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει:

$$(z-2)(\overline{z}-2)+|z-2|=2$$

Β1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z, είναι κύκλος με κέντρο $K(2,0)$ και ακτίνα $\rho=1$ (μονάδες 5)

Στη συνέχεια, για κάθε μιγαδικό z που ανήκει στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο, να αποδείξετε ότι $|z|\leq 3$ (μονάδες 3)

Μονάδες 8

Β2. Αν οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 που ανήκουν στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο είναι ρίζες της εξίσωσης $w^2+\beta w+\gamma=0$, με w μιγαδικό αριθμό, $\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, και

$$\left|\operatorname{Im}(z_1)-\operatorname{Im}(z_2)\right|=2$$

τότε να αποδείξετε ότι:

$$\beta=-4 \quad \text{και} \quad \gamma=5$$

Μονάδες 9

Β3. Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς α_0, α_1, α_2 οι οποίοι ανήκουν στον γεωμετρικό τόπο του ερωτήματος **Β1**. Αν ο μιγαδικός αριθμός v ικανοποιεί τη σχέση:

$$v^3+\alpha_2 v^2+\alpha_1 v+\alpha_0=0$$

τότε να αποδείξετε ότι:

$$|v|<4$$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με f παραγωγίσιμη τέτοιες ώστε:

- $\left(f(x)+x\right)\left(f'(x)+1\right)=x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- $f(0)=1$ και
- $g(x)=x^3+\dfrac{3x^2}{2}-1$

Γ1. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x)=\sqrt{x^2+1}-x,\quad x\in\mathbb{R}$$

Μονάδες 9

Γ2. Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης

$$f(g(x))=1$$

Μονάδες 8

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in\left(0,\ \frac{\pi}{4}\right)$ τέτοιο, ώστε:

$$\int_{x_0-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)\,dt=f\left(x_0-\frac{\pi}{4}\right)\varepsilon\varphi\, x_0$$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Έστω $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύουν:

- Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$
- $f(1)=1$
- $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+5h)-f(1-h)}{h}=0$

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση

$$g(x)=\int_{\alpha}^{x}\frac{f(t)-1}{t-1}\,dt,\quad x\in(1,+\infty)\ \text{ και }\ \alpha>1$$

Να αποδείξετε ότι:

Δ1. $f'(1)=0$ (μονάδες 4), καθώς επίσης ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=1$ (μονάδες 2).

Μονάδες 6

Δ2. η g είναι γνησίως αύξουσα (μονάδες 3), και στη συνέχεια, να λύσετε την ανίσωση στο $\mathbb{R}$

$$\int_{8x^2+5}^{8x^2+6} g(u)\,du>\int_{2x^4+5}^{2x^4+6} g(u)\,du$$ (μονάδες 6)

Μονάδες 9

Δ3. η g είναι κυρτή, καθώς επίσης ότι η εξίσωση

$$(\alpha-1)\int_{\alpha}^{x}\frac{f(t)-1}{t-1}dt=\big(f(\alpha)-1\big)(x-\alpha),\quad x>1$$

έχει ακριβώς μια λύση.

Μονάδες 10

<u>ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)</u>

1. <u>Στο εξώφυλλο</u> του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. <u>Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω</u> να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. <u>Στην αρχή των απαντήσεών σας</u> να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. <u>Να μην αντιγράψετε</u> τα θέματα στο τετράδιο και **<u>να μην γράψετε</u>** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. <u>Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.</u> Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **<u>στο τετράδιό σας</u>** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, και μόνο για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

Δελτίο Τύπου: Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης
ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
Αρ. πρωτ. 14723/27-5-2013
ΔΕΥΤΕΡΑ 27 ΜΑΪΟΥ 2013

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΔΕΛΤΙΟ ΤΥΠΟΥ

Ειδικά Σχόλια:
Θέμα Α:
Θεωρία
Θέμα Β:
Τα ερωτήματα Β1, Β2 εξετάζουν βασικές γνώσεις. Το ερώτημα Β3 είναι, ίσως, το πιο δύσκολο από όλα τα θέματα, καθότι η επιτυχής αντιμετώπισή του απαιτεί λεπτούς αλγεβρικούς χειρισμούς.

Θέμα Γ:
Απευθύνεται σε καλά προετοιμασμένους υποψηφίους και κυρίως τα ερωτήματα Γ2 και Γ3.
Θέμα Δ:
Το θέμα αναφέρεται σε ένα μεγάλο μέρος της ύλης του Διαφορικού και Ολοκληρωτικού Λογισμού. Η επίλυση του θέματος αυτού απαιτεί πολύ καλή προετοιμασία και βαθιά κατανόηση των εννοιών.

Γενικά Σχόλια
Καλύπτεται μεγάλο μέρος της ύλης.
Υπάρχει κλιμάκωση των θεμάτων ως προς τη δυσκολία, με εξαίρεση το ερώτημα Β3.
Η καλή γνώση της ύλης προηγουμένων τάξεων ήταν απαραίτητη
Τ α θέματα ήταν εκτεταμένα και η σωστή διαχείριση του χρόνου από τους υποψηφίους ήταν σημαντικός παράγοντας για την επιτυχία, ειδικά με το ερώτημα Β3.
Τα θέματα είναι τα δυσκολότερα των τελευταίων ετών και απαιτούν ειδικές τεχνικές, που ίσως δεν προωθούν την έλξη και την αγάπη των μαθητών στα Μαθηματικά.
Η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία προτίθεται να ανοίξει ουσιαστικό διάλογο με μελέτη και διερεύνηση, για το περιεχόμενο και τον τρόπο εξέτασης των Μαθηματικών στις Πανελλήνιες Εξετάσεις για την εισαγωγή στην Τριτοβάθμια εκπαίδευση.

Για το Διοικητικό Συμβούλιο
της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας

Ο Πρόεδρος
Γεώργιος Δημάκος
Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών

Ο Γενικός Γραμματέας
Εμμανουήλ Κρητικός
Λέκτορας Οικονομικού
Πανεπιστημίου Αθηνών

mathematica.gr

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΑΙ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΔΕΥΤΕΡΑ 27 ΜΑΪΟΥ 2013

Λύσεις

των

θεμάτων

Έκδοση 1η (27/05/2013, 23 : 50)

Οι απαντήσεις και οι λύσεις
είναι αποτέλεσμα συλλογικής δουλειάς
των Επιμελητών του Δικτυακού Τόπου

mathematica.gr

με βάση υλικό που αναρτήθηκε στο mathematica
http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=46&t=37283

Συνεργάστηκαν οι:
Στράτης Αντωνέας, Ανδρέας Βαρβεράκης, Βασίλης Κακαβάς,
Γιώργης Καλαθάκης, Φωτεινή Καλδή, Σπύρος Καρδαμίτσης,
Νίκος Κατσίπης, Στάθης Κούτρας, Χρήστος Κυριαζής,
Γρηγόρης Κωστάκος, Δημήτρης Ιωάννου, Βαγγέλης Μουρούκος,
Ροδόλφος Μπόρης, Μίλτος Παπαγρηγοράκης, Λευτέρης Πρωτοπαπάς,
Γιώργος Ρίζος, Μπάμπης Στεργίου, Σωτήρης Στόγιας,
Αλέξανδρος Συγκελάκης, Αχιλλέας Συνεφακόπουλος, Χρήστος Τσιφάκης,
Κώστας Τηλέγραφος, Σωτήρης Χασάπης,

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΔΕΥΤΕΡΑ 27 ΜΑΪΟΥ 2013
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα [α, β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α, β], τότε να αποδείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$$

Μονάδες 7

Α2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού (Θ.Μ.Τ.)

Μονάδες 4

Α3. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β] του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Η εξίσωση $|z - z_0| = \rho, \rho > 0$ παριστάνει τον κύκλο με κέντρο το σημείο $K(z_0)$ και ακτίνα ρ^2, όπου z, z_0 μιγαδικοί αριθμοί.

β) Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) < 0$, τότε f(x) < 0 κοντά στο x_0

γ) Ισχύει ότι: $|\eta\mu x| \le |x|$ για κάθε $x \in IR$

δ) Ισχύει ότι: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 1$

ε) Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 10

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Α1. Η απόδειξη βρίσκεται στις σελίδες 334-335 του σχολικού βιβλίου.

Α2. Το θεώρημα βρίσκεται στη σελίδα 246 του σχολικού βιβλίου.

Α3. Ο ορισμός βρίσκεται στη σελίδα 222 του σχολικού βιβλίου. Από : "Η f είναι παραγωγίσιμη ... , μέχρι $\lim\limits_{x \to \beta^-} \frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} \in IR$ "

Α4. **α)** **Λ**
β) **Σ**
γ) **Σ**
δ) **Λ**

ε) **Σ**

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει:

$$(z-2)(\bar{z}-2)+|z-2|=2$$

B1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z , είναι κύκλος με κέντρο K(2, 0) και ακτίνα ρ = 1. (μονάδες 5)

Στη συνέχεια, για κάθε μιγαδικό z που ανήκει στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο, να αποδείξετε ότι $|z|\le 3$. (μονάδες 3)

Μονάδες 8

B2. Αν οι μιγαδικοί αριθμοί z_1 , z_2 που ανήκουν στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο είναι ρίζες της εξίσωσης $w^2 + \beta w + \gamma = 0$, με w μιγαδικό αριθμό, $\beta, \gamma \in IR$, και

$$|\mathrm{Im}(z_1)-\mathrm{Im}(z_2)|=2$$

τότε να αποδείξετε ότι: β = − 4 και γ = 5

Μονάδες 9

B3. Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς α_o , α_1 , α_2 οι οποίοι ανήκουν στον γεωμετρικό τόπο του ερωτήματος **B1**. Αν ο μιγαδικός αριθμός v ικανοποιεί τη σχέση:

$$v^3 + \alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0 = 0$$

τότε να αποδείξετε ότι: $|v|<4$

Μονάδες 8

ΛΥΣΗ:

B1. Επειδή $(z-2)(\bar{z}-2)=(z-2)\left(\overline{z-2}\right)=|z-2|^2$, η δοσμένη σχέση γίνεται:

$$|z-2|^2+|z-2|-2=0$$

Θέτουμε

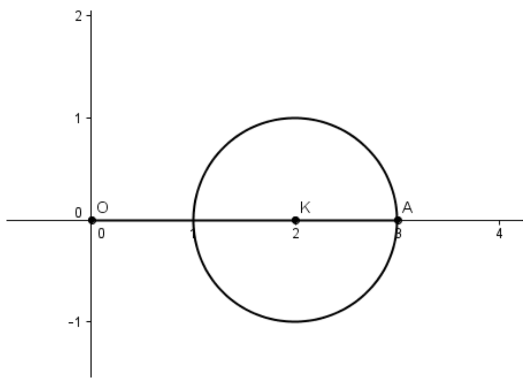
$$|z-2|=w\in(0,+\infty) \qquad (1),$$

οπότε η δοσμένη σχέση γράφεται $w^2+w=2$, με λύσεις $w=1$, $w=-2<0$ και λόγω της (1) έχουμε $w=1$, άρα $|z-2|=1$.

Επομένως ο γ. τ. των M(z) είναι κύκλος με κέντρο το K(2, 0) και ρ = 1.

Αφού το $|z|$ είναι η απόσταση του M(z) από το O(0,0) η μέγιστη απόσταση είναι η $|\overrightarrow{OA}|=3$.

Άρα $|z|\le 3$



B2. Αφού οι μιγαδικοί z_1, z_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $w^2 + βw + γ = 0$, θα είναι συζυγείς μιγαδικοί, άρα θα είναι της μορφής $z_1 = x + yi$ και $z_2 = x - yi$

Οπότε

$$|Im(z_1) - Im(z_2)| = 2 \Leftrightarrow |y + y| = 2 \Leftrightarrow |y| = 2 \Leftrightarrow y = 1 \text{ ή } y = -1$$

Αφού οι εικόνες των ανήκουν z_1, z_2 στον κύκλο $(x-2)^2 + y^2 = 1$, θα είναι

$$(x-2)^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Άρα $z_1 = 2 + i$ και $z_2 = 2 - i$.

Χρησιμοποιώντας τους τύπους Vieta, έχουμε

$$S = z_1 + z_2 = 2Re(z_1) = -β = 4 \Rightarrow β = -4,$$

$$P = z_1 \cdot z_2 = |z_1|^2 = 5 \Rightarrow γ = 5.$$

B3.

Είναι $v^3 = -α_2 v^2 - α_1 v - α_0$ επομένως:

$$|v|^3 = |α_2 v^2 + α_1 v + α_0| \le |α_2||v|^2 + |α_1||v| + |α_0| \le 3|v|^2 + 3|v| + 3$$

Αν υποθέσουμε ότι $|v| \ge 4$ τότε

$$|v|^3 \ge 4|v|^2 = 3|v|^2 + |v|^2 \ge 3|v|^2 + 4|v| \ge 3|v|^2 + 3|v| + 4, \text{ άτοπο.}$$

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f, g : IR \to IR$, με f παραγωγίσιμη τέτοιες ώστε:

- $(f(x) + x)(f'(x) + 1) = x$, για κάθε $x \in IR$
- $f(0) = 1$ και
- $g(x) = x^3 + \dfrac{3x^2}{2} - 1$

Γ1. Να αποδείξετε ότι: $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$, $x \in IR$

Μονάδες 9

Γ2. Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $f(g(x)) = 1$

Μονάδες 8

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in \left(0, \dfrac{π}{4}\right)$ τέτοιο, ώστε:

$$\int_{x_0 - \frac{π}{4}}^{0} f(t)dt = f\left(x_0 - \frac{π}{4}\right) εφx_0$$

Μονάδες 8

ΛΥΣΗ:

Γ1. Θεωρούμε τη συνάρτηση h με τύπο: $h(x)=f(x)+x, x\in IR$

Η h είναι συνεχής ως άθροισμα της παραγωγίσιμης (άρα συνεχούς) f και της ταυτοτικής.

Είναι $h(0)=f(0)=1$ και η δοθείσα σχέση γίνεται:

$$h(x)h'(x)=x \text{ αφού } h'(x)=f'(x)+1, \text{ για κάθε } x\in IR$$

Πολλαπλασιάζοντας επί δύο έχουμε ισοδύναμα για κάθε $x\in IR$

$$2h(x)h'(x)=2x \Leftrightarrow \left[h^2(x)\right]'=\left(x^2\right)' \Leftrightarrow h^2(x)=x^2+c,\ c\in IR$$

Θέτοντας όπου $x=0$ έχουμε: $c=h^2(0)=1$ επομένως

$$h^2(x)=x^2+1>0 \Rightarrow h(x)\neq 0, \text{ για κάθε } x\in IR.$$

Επειδή η h είναι συνεχής και δε μηδενίζεται από κανέναν πραγματικό αριθμό, θα διατηρεί πρόσημο. Είναι $h(x)>0$ αφού $h(0)=1>0$.

Επομένως ισχύει για κάθε $x\in IR$

$$h(x)=\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow f(x)+x=\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow f(x)=\sqrt{x^2+1}-x.$$

Γ2. Είναι $x^2+1>x^2\geq 0 \Rightarrow \sqrt{x^2+1}>|x|\geq x \Rightarrow \sqrt{x^2+1}-x>0 \Rightarrow f(x)>0$ για κάθε $x\in IR$

Με $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x \Rightarrow f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1=\dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$

$$\Rightarrow f'(x)=-\frac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}} \overset{f(x)>0,\sqrt{x^2+1}>0}{\Rightarrow} f'(x)<0 \text{ για κάθε } x\in IR$$

και συνεπώς η f είναι γνησίως φθίνουσα άρα "1-1".

Έτσι έχουμε:

$$f(g(x))=1 \overset{f(0)=1}{\Leftrightarrow} f(g(x))=f(0) \overset{f:\,1-1}{\Leftrightarrow} g(x)=0.$$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο IR (τύπος πολυωνυμικής) με

$$g'(x)=\left(x^3+\frac{3x^2}{2}-1\right)' \Rightarrow g'(x)=3x^2+3x.$$

Οπότε

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2+3x=0 \Leftrightarrow 3x(x+1)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x=-1$$

και από το πρόσημο του τριωνύμου προκύπτει ότι

$g'(x)>0$ για κάθε $x\in(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$

και $g'(x)<0$ για κάθε $x\in(-1,0)$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−	0	+	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$-\frac{1}{2}$	↘	-1	↗	$+\infty$

και με g συνεχή στο IR προκύπτει ότι:

η g είναι γνησίως αύξουσα

στα διαστήματα $(-\infty,-1],[0,+\infty)$

και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-1,0]$.

Με $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3+\dfrac{3x^2}{2}-1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$, $g(-1)=-\dfrac{1}{2}<0$, $g(0)=-1<0$

και $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3+\dfrac{3x^2}{2}-1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ προκύπτει ότι ότι στο διάστημα $(-\infty,0]$ το ολικό μέγιστο της g είναι $-\dfrac{1}{2}<0\Rightarrow g(x)<0\Rightarrow g(x)\neq 0$ και συνεπώς η εξίσωση $g(x)=0$ είναι αδύνατη στο διάστημα $(-\infty,0]$.

Με g γνησίως αύξουσα και συνεχή στο $[0,+\infty)$ προκύπτει ότι

$$g([0,+\infty))=\left[g(0),\lim_{x\to+\infty} g(x)\right)=[-1,+\infty)$$

που περιέχει και το μηδέν,

άρα υπάρχει ένα (μοναδικό λόγω της μονοτονίας της g στο $[0,+\infty)$) $x_0\in(0,+\infty)$

για το οποίο είναι $g(x_0)=0$

Άρα η εξίσωση $g(x)=0\Leftrightarrow f(g(x))=1$ έχει μία λύση και μάλιστα στο διάστημα $(0,+\infty)$.

Γ3. Θεωρούμε την συνάρτηση $k(x)=\displaystyle\int_{x-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)dt-f(x-\frac{\pi}{4})\varepsilon\varphi x$ η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ αφού προκύπτει από πράξεις συνεχών και για την οποία ισχύουν

$$k(0)=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)dt-f(-\frac{\pi}{4})\cdot\varepsilon\varphi 0=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)dt>0,$$

Αφού $x\geq 0$ και $\sqrt{x^2+1}>x$, τότε $x^2+1>x^2\Leftrightarrow 1>0$, που ισχύει, άρα $f(x)>0$

και

$$k\left(\frac{\pi}{4}\right)=\int_0^0 f(t)dt-f(0)\cdot\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}=-1<0$$

Τότε σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$ τέτοιο ώστε

$$k(x_0)=0\Leftrightarrow\int_{x_0-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)dt-f(x_0-\frac{\pi}{4})\cdot\varepsilon\varphi x_0=0$$

ΘΕΜΑ Δ

Έστω $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύουν:

- Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$
- $f(1)=1$
- $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+5h)-f(1-h)}{h}=0$

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $g(x)=\displaystyle\int_\alpha^x\frac{f(t)-1}{t-1}dt$, $x\in(1,+\infty)$ και $\alpha>1$

Να αποδείξετε ότι:

Δ1. $f'(1)=0$ (μονάδες 4), καθώς επίσης ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=1$ (μονάδες 2).

Μονάδες 6

Δ2. η g είναι γνησίως αύξουσα (μονάδες 3), και στη συνέχεια, να λύσετε την ανίσωση στο IR

$$\int_{8x^2+5}^{8x^2+6} g(u)du > \int_{2x^4+5}^{2x^4+6} g(u)du \qquad \text{(μονάδες 6)}$$

Μονάδες 9

Δ3. η g είναι κυρτή, καθώς επίσης ότι η εξίσωση

$$(\alpha-1)\int_{\alpha}^{x}\frac{f(t)-1}{t-1}dt=\left(f(\alpha)-1\right)(x-\alpha),\ \ x>1$$

έχει ακριβώς μια λύση.

Μονάδες 10

ΛΥΣΗ:

Δ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 άρα:

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-1}{h}=\ell \quad \mathbb{R}$$

Για $h\neq 0$ είναι:

$$\frac{f(1+5h)-f(1-h)}{h}=\frac{f(1+5h)-1-f(1-h)+1}{h}=$$

$$=\frac{f(1+5h)-1}{h}-\frac{f(1-h)-1}{h}=5\cdot\frac{f(1+5h)-1}{5h}+\frac{f(1+(-h))-1}{-h}$$

Είναι

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+5h)-1}{5h}=\lim_{k\to 0}\frac{f(1+k)-1}{k}=\ell$$

και

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+(-h))-1}{-h}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(1+\varepsilon)-1}{\varepsilon}=\ell$$

Άρα

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+5h)-f(1-h)}{h}=5\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(1+5h)-1}{5h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(1+(-h))-1}{-h}=5\ell \quad \ell \quad \ell$$

Επομένως,

$$6\ell \quad \ell \qquad \text{δηλαδή } f'(1)=0$$

Επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ θα έχουμε:

- Αν $0<x<1 \Rightarrow f'(x)<f'(1) \Rightarrow f'(x)<0$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,1]$

- Αν $x>1 \Rightarrow f'(x)>f'(1) \Rightarrow f'(x)>0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1,+\infty)$

Επομένως, η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=1$

Δ2. Η συνάρτηση $\phi(t)=\dfrac{f(t)-1}{t-1}$ είναι συνεχής στο διάστημα $(1,+\infty)$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων, οπότε η g θα είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό.

Για κάθε $x\in(1,+\infty)$ είναι: $g'(x)=\dfrac{f(x)-1}{x-1}>0$ γιατί $x>1$ και $f(x)>1$.
Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(1,+\infty)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $G(x)=\int_x^{x+1} g(u)\,du$ με $x\in(1,+\infty)$.

Είναι $G(x)=\int_x^{\alpha} g(u)\,du+\int_{\alpha}^{x+1} g(u)\,du=\int_{\alpha}^{x+1} g(u)\,du-\int_{\alpha}^{x} g(u)\,du$, με $\alpha>1$.

Η συνάρτηση $G_1(x)=\int_{\alpha}^{x} g(u)\,du$ είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ γιατί η g είναι συνεχής σ΄αυτό.

Η συνάρτηση $G_2(x)=\int_{\alpha}^{x+1} g(u)\,du$ είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ γιατί είναι σύνθεση της $h(x)=x+1$ με την $G_1(x)$.

Για κάθε $x\in(1,+\infty)$ είναι

$$G'(x)=g(x+1)(x+1)'-g(x)=g(x+1)-g(x)>0,$$

αφού η g είναι γνησίως αύξουσα και $x+1>x$.

Άρα η G είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(1,+\infty)$.

Είναι $8x^2+5>1$ και $2x^4+5>1$ οπότε:

$$\int_{8x^2+5}^{8x^2+6} g(u)\,du>\int_{2x^4+5}^{2x^4+6} g(u)\,du \Leftrightarrow G(8x^2+5)>G(2x^4+5) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8x^2+5>2x^4+5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^4-8x^2<0 \Leftrightarrow 2x^2(x^2-4)<0 \underset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x^2-4<0 \\ x\neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x|<2 \\ x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2<x<2 \\ x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in(-2,0)\cup(0,2)$$

Δ3. Η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $(1,+\infty)$, γιατί η $g'(x)=\dfrac{f(x)-1}{x-1}$ είναι παραγωγίσιμη, ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Άρα για κάθε $x\in(1,+\infty)$ είναι:

$$g''(x)=\frac{\left(f(x)-1\right)'(x-1)-\left(f(x)-1\right)(x-1)'}{(x-1)^2}=\frac{f'(x)(x-1)-f(x)+1}{(x-1)^2}$$

Έστω $x>1$. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[1,x]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,x)$.
Επομένως, από το θεώρημα Μέσης Τιμής θα υπάρχει $\xi\in(1,x)$ τέτοιος, ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{f(x)-1}{x-1}$$

Η f' είναι γνησίως αύξουσα, οπότε

$$\xi<x \quad \Rightarrow \quad f'(\xi)<f'(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{f(x)-1}{x-1}<f'(x) \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad f(x)-1<f'(x)(x-1) \quad \Rightarrow \quad f'(x)(x-1)-f(x)+1>0$$

Άρα $g''(x)>0$ για κάθε $x\in(1,+\infty)$, δηλαδή η g είναι κυρτή.

Η εξίσωση έχει προφανή λύση την $x=\alpha$.
Η εξίσωση ισοδύναμα γράφεται $(\alpha-1)g(x)=\left(f(\alpha)-1\right)(x-\alpha)$ με $x>1$.

Η εξίσωση της εφαπτόμενης της γραφικής παράστασης της g στο σημείο $x=\alpha$ είναι:

$$y-g(\alpha)=g'(\alpha)(x-\alpha) \Rightarrow y=\frac{f(\alpha)-1}{\alpha-1}(x-\alpha).$$

Επειδή η g είναι κυρτή, για $x\neq\alpha$, θα έχουμε:

$$g(x)>y\Rightarrow g(x)>\frac{f(\alpha)-1}{\alpha-1}(x-\alpha) \Rightarrow (\alpha-1)g(x)>\left(f(\alpha)-1\right)(x-\alpha) \text{ αφού } \alpha>1.$$

Επομένως, η εξίσωση έχει ακριβώς μια λύση, την $x=\alpha$

ΠΡΟΣΘΕΤΕΣ ΛΥΣΕΙΣ:

B1.

2η ΛΥΣΗ:

(Με τριγωνική ανισότητα):

$$|z|-2\le \left||z|-2\right| \le|z-2|=1 \Rightarrow|z|\le 3$$

ή εναλλακτικά

$$|z|=|(z-2)+2|£|z-2|+|2|=1+2=3.$$

3η ΛΥΣΗ:

(Αλγεβρικά)

Είναι $|z-2|=1$, Έστω $z=x+yi$. Τότε :

$$(x-2)^2+y^2=1\Leftrightarrow y^2=1-(x-2)^2\Rightarrow|x-2|\le1\Leftrightarrow1\le x\le3\Leftrightarrow1\le4x-3\le9$$

και :

$$(x-2)^2+y^2=1 \quad \Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2=1\Leftrightarrow x^2+y^2=4x-3$$
$$\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{4x-3} \Rightarrow|z|\le\sqrt{9}=3$$

B2.

2η ΛΥΣΗ:

Αφού $|z_i-2|=1$ ισχύει $|\text{Im}(z_i)|\le1$ για $i=1,\ 2$.

Είναι

$$2=|\text{Im}(z_1)-\text{Im}(z_2)|\le|\text{Im}(z_1)|+|\text{Im}(z_2)|\le1+1=2,$$

συνεπώς, ισχύουν οι ισότητες $|\mathrm{Im}(z_1)| = |\mathrm{Im}(z_2)| = 1$.

κι άρα, αντικαθιστώντας στην εξίσωση του κύκλου, βρίσκουμε

$$z_1 = 2+i,\ z_2 = 2-i \text{ ή } z_1 = 2-i,\ z_2 = 2+i$$

Οπότε $\beta = -(z_1+z_2) = -4$ και $\gamma = z_1 z_2 = |z_1|^2 = 5$.

B2.

3η ΛΥΣΗ:

Η ποσότητα $|\mathrm{Im}(z_1) - \mathrm{Im}(z_2)|$ εκφράζει το μήκος της προβολής της χορδής με άκρα τις εικόνες των δύο μιγαδικών, στον φανταστικό άξονα. Η προβολή αυτή έχει μήκος 2 μόνο στην περίπτωση που οι εικόνες των z_1, z_2 ορίζουν διάμετρο παράλληλη στον φανταστικό άξονα, δηλαδή $z_1 = 2+i, z_2 = 2-i$.

B3.

2η ΛΥΣΗ:

Όμοια όπως στην πρώτη λύση καταλήγουμε στο ότι $|\nu|^3 \le |\nu|^2 + 3|\nu| + 3$.

Θεωρώ την $f(x) = x^3 - 3x^2 - 3x - 3$, οπότε

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 3 = 3(x^2 - 2x - 1)$$

$$f'(x) \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 1+\sqrt{2} \ \text{ , ή } \ x \le 1-\sqrt{2}$$

άρα για $x \ge 4$ είναι γνησίως αύξουσα με $f(4) = 1 > 0$

Όμως $f(|v|) \le 0$, άρα $|v| < 4$.

3η ΛΥΣΗ:

$|v|^3 \le 3(|v|^2 + |v| + 1)$

Αν $|v| \le 1$ τότε η σχέση ισχύει .

Αν $|v| \ne 1$ τότε έχουμε :

$$|v|^3 \le 3\frac{|v|^3 - 1}{|v| - 1} \Rightarrow |v|^4 \le 4|v|^3 - 3 < 4|v|^3 \Rightarrow |v| < 4$$

4η ΛΥΣΗ:

Είναι: $v^3 + \alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0 = 0 \Rightarrow v^3 = -\left(\alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow |v^3| = \left|-\left(\alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0\right)\right| \Rightarrow |v|^3 = |\alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0| \le |\alpha_2||v|^2 + |\alpha_1||v| + |\alpha_0| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |v|^3 \le 3|v|^2 + 3|v| + 3 \Rightarrow |v|^3 < 3|v|^2 + 3|v| + 4 \Rightarrow |v|^3 - 3|v|^2 - 3|v| - 4 < 0.$$

Η τελευταία ανίσωση γράφεται ισοδύναμα (π.χ. με σχήμα Horner για $\rho = 4$)

$$\left(|v| - 4\right)\left(|v|^2 + |v| + 1\right) < 0,$$

κι αφού $|v|^2 + |v| + 1 > 0$ (ως τριώνυμο του $|v|$ με $\Delta = -3 < 0$) θα είναι $|v| < 4$.

5η ΛΥΣΗ:

$$1+\frac{\alpha_2}{\nu}+\frac{\alpha_1}{\nu^2}+\frac{\alpha_0}{\nu^3}=0\Rightarrow -1=\frac{\alpha_2}{\nu}+\frac{\alpha_1}{\nu^2}+\frac{\alpha_0}{\nu^3}\Rightarrow 1\le\frac{|\alpha_2|}{|\nu|}+\frac{|\alpha_1|}{|\nu|^2}+\frac{|\alpha_0|}{|\nu|^3}\quad (1)$$

Αν τώρα $|\nu|\ge 4$, από $(1)\Rightarrow 1\le\frac{3}{4}+\frac{3}{16}+\frac{3}{64}=\frac{63}{64}$, άτοπο

6η ΛΥΣΗ:

Όμοια όπως στην πρώτη λύση καταλήγουμε στο ότι $|\nu|^3\le|\nu|^2+3|\nu|+3$.

Άρα

$$|\nu|^3\le 3|\nu|^2+3|\nu|+3 \Leftrightarrow |\nu|^3-1\le 3\left(|\nu|^2+|\nu|+1\right)-1$$

$$\Leftrightarrow \frac{|\nu|^3-1}{|\nu|^2+|\nu|+1}\le\frac{3\left(|\nu|^2+|\nu|+1\right)}{|\nu|^2+|\nu|+1}-\frac{1}{|\nu|^2+|\nu|+1}$$

$$\Leftrightarrow\ |\nu|-1\le 3-\frac{1}{|\nu|^2+|\nu|+1}\Leftrightarrow |\nu|-4\le-\frac{1}{|\nu|^2+|\nu|+1}$$

Επειδή το δεξί μέλος της ανισότητας είναι αρνητικό, θα πρέπει να είναι αρνητικό και το αριστερό μέρος οπότε θα πρέπει $|\nu|<4$.

7η ΛΥΣΗ:

Αρχικά είναι $|\nu|^3\le 3\left(|\nu|^2+|\nu|+1\right)\Rightarrow|\nu|^2\left(|\nu|-3\right)\le 3\left(|\nu|+1\right)$

Έστω ότι $|\nu|\ge 4$

Έτσι λοιπόν έχουμε: $\begin{cases}|\nu|^2\ge 16\\ |\nu|^2\le\dfrac{3\left(|\nu|+1\right)}{|\nu|-3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|\nu|^2\ge 16\\ \dfrac{3\left(|\nu|+1\right)}{|\nu|-3}\ge 16\Rightarrow|\nu|\le\dfrac{51}{13}\end{cases}$ άτοπο, λόγω της δεύτερης σχέσης.

Γ1

2η ΛΥΣΗ:

Η δοσμένη γράφεται:

$$f(x)f'(x)+f(x)+xf'(x)+x=x\ \Leftrightarrow 2f(x)f'(x)+2\left(f(x)+xf'(x)\right)=0\ \ \Leftrightarrow\left(f^2(x)+2xf(x)\right)'=0$$

Άρα υπάρχει σταθερά c ώστε $f^2(x)+2xf(x)=c$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Για $x=0$ παίρνουμε $c=1$ άρα $f^2(x)+2xf(x)=1\Leftrightarrow f(x)\left(f(x)+2x\right)=1$, απ' όπου $f(x)\ne 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Επιπλέον, αφού η f είναι συνεχής στο IR, άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο και αφού $f(0)=1>0$, άρα $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Τώρα πλέον από την $f^2(x)+2xf(x)-1=0$ θεωρώντας την ως τριώνυμο του $f(x)$ λαμβάνουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ συμβαίνει

$$\text{είτε } f(x)=-x+\sqrt{x^2+1}\ \text{ είτε } f(x)=-x-\sqrt{x^2+1}.$$

Η δεύτερη περίπτωση απορρίπτεται καθώς παίρνει αρνητικές τιμές για οποιοδήποτε $x \in IR$ και η πρώτη παίρνει μόνο θετικές τιμές αφού $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x>\sqrt{x^2}-x=|x|-x\geq 0$.

Άρα $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$ για κάθε $x\in IR$ που επαληθεύει τις συνθήκες του προβλήματος.

Γ2.

2η ΛΥΣΗ:

Μπορεί να αποφευχθεί η εύρεση της μονοτονίας της f, ως εξής:

$$f(t)=1 \Leftrightarrow \sqrt{t^2+1}-t=1 \Leftrightarrow \sqrt{t^2+1}=t+1 \overset{t\geq -1}{\Leftrightarrow} t^2+1=(t+1)^2 \Leftrightarrow t^2+1=t^2+2t+1 \Leftrightarrow t=0,$$

οπότε

$$f(g(x))=1 \Leftrightarrow g(x)=0 \quad (...)$$

3η ΛΥΣΗ:

Ψάχνουμε να βρούμε τις λύσεις της εξίσωσης:

$$\sqrt{g^2(x)+1}-g(x)=1.$$

Η εξίσωση αυτή είναι ισοδύναμη με την :

$$\begin{cases}\sqrt{g^2(x)+1}=g(x)+1\\ g(x)+1\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g^2(x)+1=(g(x)+1)^2\\ g(x)+1\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x)=0\\ g(x)\geq -1\end{cases} \quad (1)$$

Όμως $g(x)=0 \Leftrightarrow x^3+\frac{3}{2}x^2-1=0 \Leftrightarrow 2x^3+3x^2-2=0 \quad (2)$

και

$$g(x)\geq -1 \Rightarrow x^3+\frac{3}{2}x^2-1\geq -1 \Leftrightarrow 2x^3+3x^2\geq 0 \Leftrightarrow x^2(2x+3)\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -\frac{3}{2} \quad (3)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση t με τύπο $t(x)=2x^3+3x^2-2, x\geq -\frac{3}{2}$

Οι ρίζες αυτής είναι τόσες όσες και οι ρίζες της εξίσωσης (2).

Η t είναι συνεχής και παραγωγίσιμη για κάθε $x\geq -\frac{3}{2}$ ως πολυώνυμική με

$$t'(x)=6x(x+1), \text{ για κάθε } x\geq -\frac{3}{2}.$$

Ρίζες της πρώτης παραγώγου είναι $x=0$ και $x=-1$.

Εξετάζοντας τη μονοτονία προκύπτει πως η t είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[-\frac{3}{2},-1\right]$,γνησίως φθίνουσα στο $[-1,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$

Είναι: $f\left(\left[-\frac{3}{2},-1\right]\right)=[-2,-1]$,

$f([-1,0])=[-2,-1]$ και

$f([0,+\infty)=[-2,+\infty)$ αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$		-1		0		$+\infty$
$t'(x)$			+	0	−	0	+	
$t(x)$		-2	↗	-1	↘	-2	↗	$+\infty$

Παρατηρούμε πως το μηδέν ανήκει μόνο στο τρίτο σύνολο επομένως, λόγω συνέχειας θα υπάρχει $x_0 \in (0,+\infty)$ ώστε $f(x_0)=0$.

Επομένως και η αρχική εξίσωση έχει μία μόνο θετική ρίζα.

Γ3.

2η ΛΥΣΗ:

Θέλουμε η εξίσωση $\int_{x-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)dt = f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)εφx$ να έχει μία τουλάχιστον λύση στο $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$. Η εξίσωση αυτή μετατρέπεται ισοδύναμα ως εξής:

$$\int_{x-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)dt = f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\frac{ημx}{συνx} \Leftrightarrow συνx\int_{0}^{x-\frac{\pi}{4}} f(t)dt + ημx f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0 \Leftrightarrow \left(ημx\int_{0}^{x-\frac{\pi}{4}} f(t)dt\right)'=0$$

Θεωρούμε λοιπόν τη συνάρτηση $G(x)=ημx\cdot\int_{0}^{x-\frac{\pi}{4}} f(t)dt$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ (άρα και συνεχής στο ίδιο διάστημα) διότι προκύπτει από πράξεις μεταξύ παραγωγισίμων συναρτήσεων. Είναι $G(0)=ημ0\int_{0}^{-\frac{\pi}{4}} f(t)dt = 0 = ημ\frac{\pi}{4}\int_{0}^{0} f(t)dt = G\left(\frac{\pi}{4}\right)$ επομένως ικανοποιούνται στο $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle και συνεπώς υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in \left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ ώστε: $G'(x_0)=0 \quad (1)$.

Με $G'(x)=\left(ημx\int_{0}^{x-\frac{\pi}{4}} f(t)dt\right)' = συνx\int_{0}^{x-\frac{\pi}{4}} f(t)dt + f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)ημx \overset{(1)}{\Rightarrow}$

$$συνx_0\int_{0}^{x_0-\frac{\pi}{4}} f(t)dt + f\left(x_0-\frac{\pi}{4}\right)ημx_0 = 0 \Leftrightarrow -συνx_0\int_{0}^{x_0-\frac{\pi}{4}} f(t)dt = f\left(x_0-\frac{\pi}{4}\right)ημx_0$$

$$\Leftrightarrow συνx_0\int_{x_0-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)dt = f\left(x_0-\frac{\pi}{4}\right)ημx_0$$

$$\overset{συνx_0>0,\ αφου\ x_0\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)}{\Leftrightarrow} \int_{x_0-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)dt = f\left(x_0-\frac{\pi}{4}\right)εφx_0$$

Δ2.

2η ΛΥΣΗ (για την ανίσωση):

Θέτουμε $h(x)=\int_{8x^2+5}^{8x^2+6} g(t)dt$ και παρατηρούμε ότι $h(-x)=h(x)$ δηλαδή η h είναι άρτια.

Η h είναι παραγωγίσιμη με $h'(x)=16x\left((g(8x^2+6)-g(8x^2+5)\right)$.

Άρα $h(0)=0$ και $h'(x)>0$ αν και μόνο αν $x>0$, (αφού η g είναι γνησίως αύξουσα), δηλ. η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Η ζητούμενη ανίσωση είναι ισοδύναμη με την ανίσωση $h\left(|x|\right)>h\left(\dfrac{x^2}{2}\right)$.

Οπότε:

$$h\left(|x|\right)>h\left(\frac{x^2}{2}\right)\Leftrightarrow |x|>\frac{x^2}{2}\Leftrightarrow |x|\left(2-|x|\right)>0\Leftrightarrow x\in(-2,0)\cup(0,2)$$

3η ΛΥΣΗ (για την ανίσωση):

Αν η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ και $a,b,a+h,b+h\in\Delta$ με $h>0$,

τότε για $a<a+h<b<b+h$ ισχύει

$$\int_a^{a+h} g(x)dx<hg(a+h)<hg(b)<\int_b^{b+h} g(x)dx,$$ λόγω της μονοτονίας της g.

Στην περίπτωση που $a<b<a+h<b+h$ εργαζόμαστε ομοίως στα ξένα διαστήματα $[a,b],[a+h,b+h]$.

Έτσι τελικά ισχύει η ισοδυναμία:

$$\int_a^{a+h} g(x)dx<\int_b^{b+h} g(x)dx\Leftrightarrow a<b..$$

Δ3.

2η ΛΥΣΗ (για την εξίσωση):

Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα $g(x)=g'(\alpha)(x-\alpha)$.

Ύπαρξη: Αφού $g(\alpha)=0$, μια προφανής λύση είναι το $x=\alpha$.

Μοναδικότητα: Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $\beta\neq\alpha$ ώστε

$$g(\beta)=g'(\alpha)(\beta-\alpha).$$

Τότε $g'(\alpha)=\dfrac{g(\beta)-g(\alpha)}{\beta-\alpha}=g'(\xi)$ για κάποιο ξ στο ανοικτό διάστημα με άκρα τα α, β, άτοπο αφού η g' είναι 1-1, ως γνησίως μονότονη...

Δ3.

3η ΛΥΣΗ (για την εξίσωση):

Η εξίσωση έχει προφανή ρίζα την $x=\alpha$ και η εξίσωση γράφεται για $x\neq\alpha$

$$(\alpha-1)\cdot\int_{\alpha}^{x}\frac{f(t)-1}{t-1}dt=\left(f(\alpha)-1\right)\cdot(x-\alpha)\Leftrightarrow\frac{\int_{\alpha}^{x}\frac{f(t)-1}{t-1}dt}{x-\alpha}=\frac{f(\alpha)-1}{\alpha-1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{g(x)-g(\alpha)}{x-\alpha}=\frac{f(\alpha)-1}{\alpha-1}\Leftrightarrow g'(\gamma)=g'(\alpha)\overset{g'\ \gamma\nu.\alpha\upsilon\xi}{\Leftrightarrow}\gamma=\alpha$$

Όπου γ ανήκει στο (α,x) ή (x,α) και προκύπτει από εφαρμογή του Θ.Μ.Τ στο για την g στο $[\alpha,x]$ ή $[x,\alpha]$ που είναι άτοπο. Άρα μοναδική λύση το $x=\alpha$.

ΣΧΟΛΙΑ:

Για το Α4

α) Λ (...με ακτίνα ρ, σελ. 99)
β) Σ (σελ. 165)
γ) Σ (σελ. 170)
δ) Λ (Είναι ίσο με 0, σελ. 171)
ε) Σ (σελ. 192)