



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
72^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
19 Νοεμβρίου 2011

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \left(\frac{2}{7} + 1 - \frac{1}{14} \right) : \frac{17}{2} - \frac{1}{7} + 5 \frac{1}{6} - \left(\frac{3}{2} + \frac{7}{3} \cdot 2 - 1 \right)$$

Λύση

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{4}{14} + \frac{14}{14} - \frac{1}{14} \right) \cdot \frac{2}{17} - \frac{1}{7} + \frac{31}{6} - \left(\frac{3}{2} + \frac{14}{3} - 1 \right) \\ &= \frac{17}{14} \cdot \frac{2}{17} - \frac{1}{7} + \frac{31}{6} - \left(\frac{9}{6} + \frac{28}{6} - \frac{6}{6} \right) = \frac{1}{7} - \frac{1}{7} + \frac{31}{6} - \frac{31}{6} = 0. \end{aligned}$$

Πρόβλημα 2

Αν ο ν είναι πρώτος φυσικός αριθμός και το κλάσμα $\frac{10}{\nu}$ παριστάνει φυσικό αριθμό, να βρείτε όλες τις δυνατές τιμές της παράστασης:

$$B = \frac{2}{\nu - \frac{1}{5}} : \frac{\nu - \frac{\nu}{2}}{9}$$

Λύση

Επειδή το κλάσμα $\frac{10}{\nu}$ παριστάνει φυσικό αριθμό και ο αριθμός ν είναι πρώτος φυσικός αριθμός, έπεται ότι οι δυνατές τιμές του ν είναι $\nu = 2$ ή $\nu = 5$.

- Για $\nu = 2$, έχουμε: $B = \frac{2}{2 - \frac{1}{5}} : \frac{2 - \frac{2}{2}}{9} = \frac{2}{\frac{9}{5}} : \frac{2 - 1}{9} = \frac{10}{9} : \frac{1}{9} = \frac{10}{9} \cdot 9 = 10$.
- Για $\nu = 5$, έχουμε: $B = \frac{2}{5 - \frac{1}{5}} : \frac{5 - \frac{5}{2}}{9} = \frac{2}{\frac{24}{5}} : \frac{\frac{5}{2}}{9} = \frac{10}{24} : \frac{5}{18} = \frac{10}{24} \cdot \frac{18}{5} = \frac{180}{120} = \frac{3}{2}$.

Πρόβλημα 3

Τρεις αριθμοί α , β , γ είναι ανάλογοι με τους αριθμούς 3, 9, 11 αντίστοιχα. Αν πάρουμε τον αριθμό γ ως μειωτέο και τον αριθμό α ως αφαιρετέο, τότε προκύπτει διαφορά ίση με 56. Να βρεθούν οι αριθμοί α , β και γ .

Λύση

Από την πρώτη υπόθεση του προβλήματος έχουμε ότι: $\frac{\alpha}{3} = \frac{\beta}{9} = \frac{\gamma}{11} = \omega$, οπότε θα είναι $\alpha = 3\omega$, $\beta = 9\omega$ και $\gamma = 11\omega$. Έτσι από τη δεύτερη υπόθεση του προβλήματος προκύπτει η εξίσωση

$$\gamma - \alpha = 56 \Leftrightarrow 11\omega - 3\omega = 56 \Leftrightarrow 8\omega = 56 \Leftrightarrow \omega = 7.$$

Άρα είναι: $\alpha = 3 \cdot 7 = 21$, $\beta = 9 \cdot 7 = 63$ και $\gamma = 11 \cdot 7 = 77$.

Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και η διχοτόμος του $A\Delta$. Προεκτείνουμε τη διχοτόμο $A\Delta$ κατά το ευθύγραμμο τμήμα ΔH έτσι ώστε $A\Delta = \Delta\text{H}$. Από το σημείο H φέρνουμε ευθεία παράλληλη προς την πλευρά AB που τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο E και την πλευρά $B\Gamma$ στο σημείο Z .

1. Να αποδείξετε ότι: $\hat{A}\hat{D}E = 90^\circ$.

2. Να βρείτε τη γωνία $\hat{E}\hat{D}Z$, αν γνωρίζετε ότι: $\hat{B} - \hat{\Gamma} = 20^\circ$.

Λύση

1. Επειδή η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας

\hat{A} , θα ισχύει: $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \frac{\hat{A}}{2}$.

Από την παραλληλία των AB και ZH , συμπεραίνουμε ότι $\hat{A}_1 = \hat{H}$ (εντός εναλλάξ).

Άρα θα ισχύει $\hat{A}_2 = \hat{H}$, οπότε το τρίγωνο $A\text{E}H$ είναι ισοσκελές.

Το Δ είναι το μέσο της βάσης AH του ισοσκελούς τριγώνου $A\text{E}H$, οπότε η διάμεσος $E\Delta$ θα είναι και ύψος του ισοσκελούς τριγώνου $A\text{E}H$, δηλαδή θα είναι $E\Delta \perp AH$ και $\hat{A}\hat{D}E = 90^\circ$

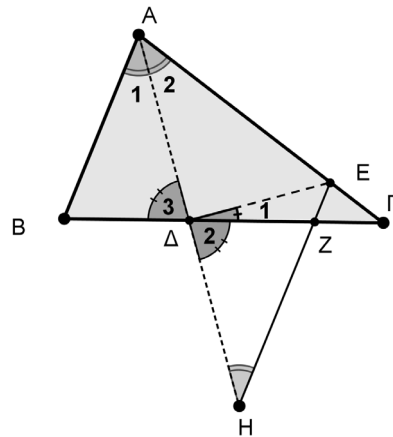
2. Επειδή $\hat{G}\hat{D}E = \hat{A}\hat{D}E = 90^\circ$, θα ισχύει:

$$\hat{E}_1 = 90^\circ - \hat{\Delta}_2 = 90^\circ - \hat{\Delta}_3.$$

Η $\hat{\Delta}_3$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $A\Delta\Gamma$, δηλαδή παραπληρωματική της γωνίας

$\hat{A}\hat{\Delta}\hat{\Gamma}$, οπότε θα είναι $\hat{\Delta}_3 = \frac{\hat{A}}{2} + \hat{\Gamma}$. Από τις δύο τελευταίες ισότητες έχουμε:

$$\hat{E}_1 = 90^\circ - \hat{\Delta}_2 = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2} - \hat{\Gamma} = \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} - \frac{\hat{A}}{2} - \hat{\Gamma} = \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2} = \frac{20^\circ}{2} = 10^\circ.$$



Σχήμα 1

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν $\alpha = 10^{-1} : 10^{-3}$, $\beta = 10^{-5} : 10^{-7}$ και $10^{-1} \cdot 1000$ να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \left(\frac{6\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha} \right)^{-2}$$

Λύση

Έχουμε:

$$\alpha = 10^{-1} : 10^{-3} = 10^{-1+3} = 10^2, \beta = 10^{-5} : 10^{-7} = 10^{-5+7} = 10^2 \text{ και } \gamma = 10^{-1} \cdot 1000 = 10^{-1} \cdot 10^3 = 10^2.$$

Άρα η παράσταση γίνεται:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{6 \cdot 10^2 \cdot 10^2 \cdot 10^2}{10^2 \cdot 10^2 + 10^2 \cdot 10^2 + 10^2 \cdot 10^2} \right)^{-2} = \left(\frac{6 \cdot 10^{2+2+2}}{10^{2+2} + 10^{2+2} + 10^{2+2}} \right)^{-2} = \left(\frac{6 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^4} \right)^{-2} \\ &= (2 \cdot 10^{6-4})^{-2} = (2 \cdot 10^2)^{-2} = \frac{1}{(2 \cdot 10^2)^2} = \frac{1}{2^2 \cdot 10^2} = \frac{1}{4 \cdot 100} = \frac{1}{400} \end{aligned}$$

Πρόβλημα 2

Να βρεθούν οι ακέραιοι που επαληθεύουν και τις δύο ανισώσεις:

$$\frac{x}{2} - \frac{x-5}{4} \leq 2 \quad \text{και} \quad \frac{\frac{x}{2}-3}{4} - \frac{2x-9}{8} \leq x.$$

Λύση

Λύνουμε καθεμία από τις ανισώσεις. Έχουμε:

$$\frac{x}{2} - \frac{x-5}{4} \leq 2 \Leftrightarrow 4 \cdot \frac{x}{2} - 4 \cdot \frac{x-5}{4} \leq 4 \cdot 2 \Leftrightarrow 2x - (x-5) \leq 8 \Leftrightarrow 2x - x + 5 \leq 8 \Leftrightarrow x \leq 3.$$

$$\frac{\frac{x}{2}-3}{4} - \frac{2x-9}{8} \leq x \Leftrightarrow \frac{\frac{x}{2}-6}{4} - \frac{2x-9}{8} \leq x \Leftrightarrow \frac{x-6}{4} - \frac{2x-9}{8} \leq x$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-6}{8} - \frac{2x-9}{8} \leq x \Leftrightarrow 8 \cdot \frac{x-6}{8} - 8 \cdot \frac{2x-9}{8} \leq 8 \cdot x \Leftrightarrow x-6 - (2x-9) \leq 8x$$

$$\Leftrightarrow x-6-2x+9 \leq 8x \Leftrightarrow 3 \leq 9x \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq x \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{3}.$$

Επομένως οι δύο ανισώσεις συναληθεύουν όταν $\frac{1}{3} \leq x \leq 3$, οπότε οι ακέραιοι που συναληθεύουν τις δύο ανισώσεις είναι οι 1, 2 και 3.

Πρόβλημα 3

Στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy δίνεται ότι η ευθεία (ε) με εξίσωση $y = (3\lambda - 1)x + 2\mu$, όπου λ, μ πραγματικοί αριθμοί, είναι παράλληλη με την ευθεία (δ) με εξίσωση $y = 2\lambda x$ και περνάει από το σημείο $K(2, 8)$.

(α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ και μ .

(β) Να επαληθεύσετε ότι τα σημεία $\Lambda(-4, -4)$ και $M(-1, 2)$ ανήκουν στην ευθεία (ε) και να αποδείξετε ότι το σημείο M είναι το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος $ΚΛ$.

Λύση

(α) Επειδή είναι $(\varepsilon) \parallel (\delta)$, οι δύο ευθείες θα έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης, οπότε προκύπτει η εξίσωση $3\lambda - 1 = 2\lambda \Leftrightarrow \lambda = 1$. Έτσι η εξίσωση της ευθείας (ε) γίνεται $y = 2x + 2\mu$. Επιπλέον, από την υπόθεση, το σημείο $K(2, 8)$ ανήκει στην ευθεία (ε) , οπότε θα ισχύει: $8 = 2 \cdot 2 + 2\mu \Leftrightarrow 2\mu = 4 \Leftrightarrow \mu = 2$. Άρα έχουμε:

$$\lambda = 1, \mu = 2 \quad \text{και} \quad (\varepsilon): y = 2x + 4.$$

(β) Επειδή ισχύουν $2 \cdot (-4) + 4 = -4$ και $2 \cdot (-1) + 4 = 2$, τα σημεία $\Lambda(-4, -4)$ και $M(-1, 2)$ επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας (ε) , οπότε αυτά είναι σημεία της ευθείας (ε) . Επιπλέον, παρατηρούμε οι αποστάσεις του σημείου M από τα σημεία K και Λ είναι ίσες. Πράγματι, έχουμε

$$MK = \sqrt{(2+1)^2 + (8-2)^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45}$$

$$M\Lambda = \sqrt{(-4+1)^2 + (-4-2)^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45}$$

Επομένως το σημείο M είναι το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος $ΚΛ$.

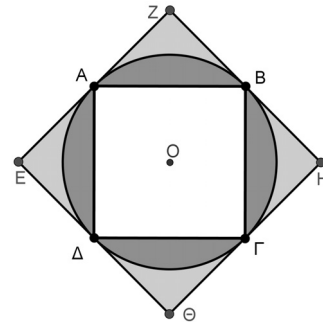
Πρόβλημα 4

Στο διπλανό σχήμα τα τετράπλευρα $ΑΒΓΔ$ και $ΕΖΗΘ$ είναι τετράγωνα. Το τετράγωνο $ΕΖΗΘ$ έχει πλευρές που εφάπτονται του κύκλου $C(O, \rho)$ στα σημεία A, B, Γ και Δ .

(α) Να βρείτε το άθροισμα Σ_1 των εμβαδών των τεσσάρων χωρίων που βρίσκονται εσωτερικά του κύκλου $C(O, \rho)$ και εξωτερικά του τετραγώνου $ΑΒΓΔ$.

(β) Να βρείτε το άθροισμα Σ_2 των εμβαδών των τεσσάρων χωρίων που βρίσκονται εσωτερικά του τετραγώνου $ΕΖΗΘ$ και εξωτερικά του κύκλου $C(O, \rho)$.

(γ) Να αποδείξετε ότι $\frac{\Sigma_1}{\Sigma_2} < \frac{4}{3}$. (Θεωρείστε ότι $\pi = 3,1415$).



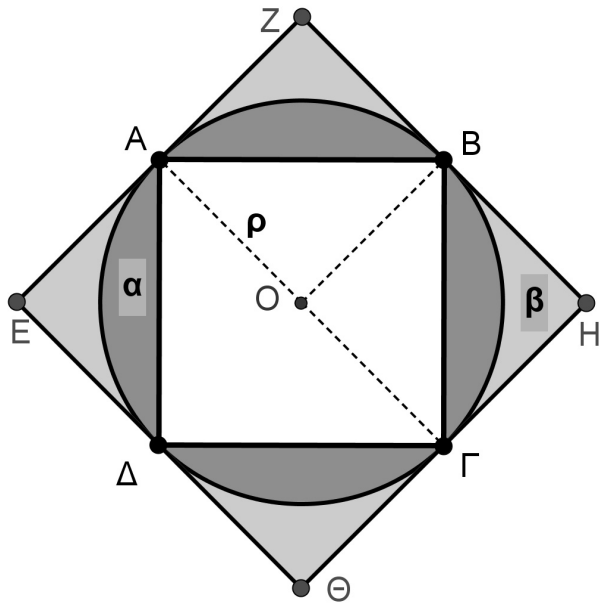
Λύση

1. Επειδή είναι $OA = OB$, $OA \perp EZ$ και $OB \perp ZH$, έπεται ότι το τετράπλευρο $ΟΑΖΒ$ είναι τετράγωνο, οπότε το τρίγωνο $ΑΟΒ$ είναι ορθογώνιο στο $Ο$. Επομένως, από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο $ΟΑΒ$ λαμβάνουμε:

$$AB^2 = \rho^2 + \rho^2 \Leftrightarrow AB^2 = 2\rho^2 \Leftrightarrow AB = \rho\sqrt{2}.$$

Άρα το εμβαδόν του τετραγώνου είναι: $2\rho^2$. Το εμβαδόν του κύκλου είναι $\pi\rho^2$, οπότε το άθροισμα Σ_1 , θα είναι:

$$\Sigma_1 = \pi\rho^2 - 2\rho^2 = (\pi - 2)\rho^2$$



Σχήμα 2

2. Επειδή είναι $OA \perp EZ$ και $OG \perp H\Theta$, έπεται ότι η AG είναι διάμετρος του κύκλου $C(O, \rho)$. Άρα το τετράπλευρο $AGHZ$ είναι ορθογώνιο, οπότε $ZH = 2\rho$. Επομένως το εμβαδόν του τετραγώνου $EZH\Theta$ είναι ίσο με $4\rho^2$. Άρα έχουμε:

$$\Sigma_2 = 4\rho^2 - \pi\rho^2 = (4 - \pi)\rho^2.$$

3. Σύμφωνα με τα προηγούμενα έχουμε:

$$\frac{\Sigma_1}{\Sigma_2} < \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{(\pi - 2)\rho^2}{(4 - \pi)\rho^2} < \frac{4}{3} \Leftrightarrow 3(\pi - 2) < 4(4 - \pi) \Leftrightarrow 3\pi - 6 < 16 - 4\pi$$

$$\Leftrightarrow 7\pi < 22 \Leftrightarrow \pi < \frac{22}{7} = 3,1428\dots, \text{ που ισχύει.}$$

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Να βρείτε τις ακέραιες λύσεις του συστήματος:

$$\begin{cases} (x-10)(x^2-7x+10)=0 \\ \frac{x^2+1}{2} + \frac{2x-1}{5} < \frac{x(x+1)}{2} \end{cases}$$

Λύση

Έχουμε

$$\begin{aligned} (x-10)(x^2-7x+10)=0 &\Leftrightarrow x-10=0 \text{ ή } x^2-7x+10=0 \\ &\Leftrightarrow x=10 \text{ ή } x^2-7x+10=0. \end{aligned}$$

Η εξίσωση $x^2-7x+10=0$, έχει το πρώτο μέλος της τριώνυμο με $\alpha=1$, $\beta=-7$, $\gamma=10$, οπότε είναι $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=9$ και οι ρίζες της εξίσωσης είναι $x=2$ ή $x=5$.

Διαφορετικά μπορούμε να πούμε ότι η εξίσωση $x^2-7x+10=0$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $x(x-7)=-10$. Επειδή ζητάμε ακέραιες λύσεις της εξίσωσης, συμπεραίνουμε ότι ο x πρέπει να είναι διαιρέτης του 10. Επομένως θα είναι $x \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10\}$. Με δοκιμές διαπιστώνουμε ότι οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι ακέραιοι 2 και 5.

Στη συνέχεια επιλύουμε την ανίσωση του συστήματος

$$\frac{x^2+1}{2} + \frac{2x-1}{5} < \frac{x(x+1)}{2} \Leftrightarrow 5x^2+5+4x-2 < 5x^2+5x \Leftrightarrow x > 3.$$

Επομένως οι ζητούμενες ακέραιες λύσεις του συστήματος είναι: $x=5$ ή $x=10$.

2. Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$A(x) = \frac{1+x^4+(1+x)^3+x(1+x)^3}{1+x^2+(1+x)^2} - \frac{2(1+x^3)+(1+x)^3}{3(x^2+1)}.$$

Λύση

Αν θέσουμε

$$B(x) = \frac{1+x^4+(1+x)^3+x(1+x)^3}{1+x^2+(1+x)^2} \text{ και } \Gamma(x) = \frac{2(1+x^3)+(1+x)^3}{3(x^2+1)},$$

τότε η παράσταση $A(x)$ είναι ίση με τη διαφορά $B(x)-\Gamma(x)$. Έχουμε:

$$\begin{aligned} B(x) &= \frac{1+x^4+(1+x)^3+x(1+x)^3}{1+x^2+(1+x)^2} = \frac{1+x^4+1+3x+3x^2+x^3+x(1+3x+3x^2+x^3)}{1+x^2+1+2x+x^2} \\ &= \frac{2x^4+4x^3+6x^2+4x+2}{2+2x+2x^2} = \frac{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}{1+x+x^2} = \frac{x^4+2x^3+x^2+2x^2+2x+1}{1+x+x^2} \\ &= \frac{(x^2+x)^2+2(x^2+x)+1}{1+x+x^2} = \frac{(x^2+x+1)^2}{x^2+x+1} = x^2+x+1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma(x) &= \frac{2(1+x^3)+(1+x)^3}{3(x^2+1)} = \frac{3+3x^3+3x^2+3x}{3(x^2+1)} = \frac{x^3+x^2+x+1}{x^2+1} \\ &= \frac{x^2(x+1)+(x+1)}{x^2+1} = \frac{(x+1)(x^2+1)}{x^2+1} = x+1.\end{aligned}$$

Άρα έχουμε:

$$A(x) = B(x) - \Gamma(x) = x^2 + x + 1 - (x + 1) = x^2.$$

3. (α) Αν κ ακέραιος, να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{\kappa x}{2} + \frac{x}{4} = \kappa(x+2) - \frac{3(\kappa x - 1)}{4}.$$

(β) Για ποιες τιμές του ακέραιου κ η παραπάνω εξίσωση έχει ακέραιες λύσεις;

Λύση

(α) Η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την

$$\begin{aligned}2\kappa x + x &= 4\kappa(x+2) - 3(\kappa x - 1) \Leftrightarrow 2\kappa x + x = 4\kappa x + 8\kappa - 3\kappa x + 3 \Leftrightarrow \kappa x + x = 8\kappa + 3 \\ &\Leftrightarrow (\kappa + 1)x = 8\kappa + 3.\end{aligned}\quad (1)$$

Διακρίνουμε τώρα τις περιπτώσεις:

1. Αν $\kappa = -1$, τότε η εξίσωση γίνεται $0 \cdot x = -5$ και είναι αδύνατη.
2. Αν $\kappa \in \mathbb{Z} - \{-1\}$, δηλαδή, αν ο κ είναι ακέραιος διαφορετικός από το -1 ,

τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση $x = \frac{8\kappa + 3}{\kappa + 1}$.

(β) Η εξίσωση έχει ακέραιες λύσεις, όταν είναι

$$x = \frac{8\kappa + 3}{\kappa + 1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{8\kappa + 8 - 5}{\kappa + 1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{8(\kappa + 1) - 5}{\kappa + 1} \in \mathbb{Z}$$

$$x = 8 - \frac{5}{\kappa + 1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{5}{\kappa + 1} \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \kappa + 1 \in \{-1, 1, -5, 5\} \Leftrightarrow \kappa \in \{-2, 0, -6, 4\}.$$

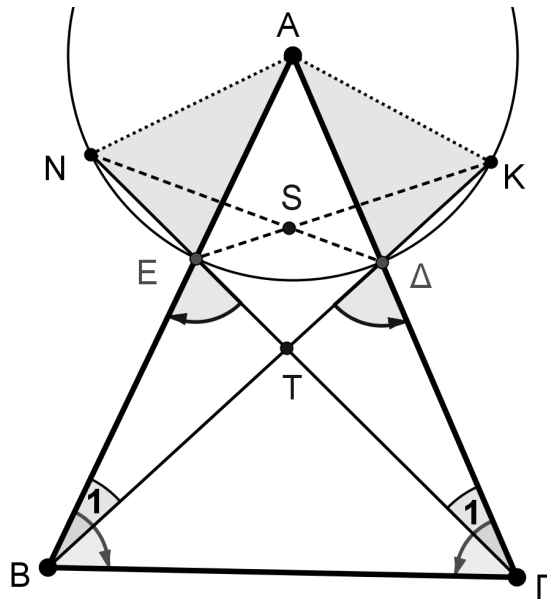
Όλες οι τιμές που βρήκαμε για το κ είναι δεκτές, αφού είναι διαφορετικές του -1 .

Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Κύκλος με κέντρο την κορυφή A και ακτίνα $\rho < AB$ τέμνει τις πλευρές AB και $A\Gamma$ στα σημεία E και Δ , αντίστοιχα. Οι ευθείες $B\Delta$, ΓE τέμνουν για δεύτερη φορά το κύκλο στα σημεία K , N αντίστοιχα. Αν T είναι το σημείο τομής των $B\Delta$, ΓE και S το σημείο τομής των ΔN , EK , να αποδείξετε ότι τα σημεία A , S και T βρίσκονται επάνω στην ίδια ευθεία.

Λύση

Τα τρίγωνα $A\Delta B$ και $A\Gamma E$ είναι ίσα γιατί έχουν: (α) $A\Delta = AE$, ως ακτίνες του ίδιου κύκλου, (β) $AB = A\Gamma$ (πλευρές του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$) και (γ) η γωνία \hat{A} είναι κοινή για τα δύο τρίγωνα.



Σχήμα 3

Από την ισότητα των τριγώνων $\triangle A\Delta B$ και $\triangle A\epsilon\Gamma$, προκύπτουν οι ισότητες:

- $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$ και κατά συνέπεια:

$$\hat{B}\hat{T}\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}\hat{T}\hat{B}. \quad (1)$$

- $\hat{A}\hat{\Delta}B = \hat{A}\hat{\epsilon}\Gamma$ και κατά συνέπεια ως παραπληρωματικές ίσων γωνιών

$$\hat{B}\hat{\epsilon}\hat{\Gamma} = \hat{B}\hat{\Delta}\hat{\Gamma} \quad (2)$$

- $\Delta B = \Delta\Gamma$. (3)

Από την ισότητα (1) των γωνιών $\hat{B}\hat{T}\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}\hat{T}\hat{B}$ προκύπτει ότι το τρίγωνο $B\hat{T}\hat{\Gamma}$ είναι ισοσκελές και κατά συνέπεια το σημείο T θα ανήκει στη μεσοκάθετη της $B\Gamma$.

Από το ισοσκελές τρίγωνο $B\hat{T}\hat{\Gamma}$ έχουμε: $TB = T\Gamma$ και σε συνδυασμό με την ισότητα (3) συμπεραίνουμε: $TE = T\Delta$.

Από την ισότητα (2) των γωνιών $\hat{B}\hat{\epsilon}\hat{\Gamma} = \hat{B}\hat{\Delta}\hat{\Gamma}$, προκύπτει η ισότητα των ισοσκελών τριγώνων $\triangle A\Delta K$ και $\triangle A\epsilon N$. Άρα $\Delta K = \epsilon N$ και επειδή $TE = T\Delta$, καταλήγουμε $TK = TN$.

Από τις ισότητες $TE = T\Delta$ και $TK = TN$ συμπεραίνουμε την ισότητα των τριγώνων $\triangle ETK$ και $\triangle \Delta TN$.

Από την προηγούμενη ισότητα προκύπτει η ισότητα των τριγώνων $\triangle SEN = \triangle \Delta K$ και στη συνέχεια η ισότητα $SA\epsilon = SAK$, οπότε το σημείο S ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας \hat{A} .

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

(α) Να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$K(x) = \frac{(x+2)(2x-1)(x-1)+x-4}{x^2-2}, \quad x \neq \pm\sqrt{2}.$$

(β) Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A = \frac{2012 \cdot 4019 \cdot 2009 + 2006}{2010^2 - 2}.$$

χωρίς την εκτέλεση των σημειούμενων πράξεων.

Λύση

(α) Εκτελούμε τις πράξεις και παραγοντοποιούμε τον αριθμητή της παράστασης:

$$\begin{aligned} \frac{(x+2)(2x-1)(x-1)+x-4}{x^2-2} &= \frac{(x+2)(2x^2-3x+1)+x-4}{x^2-2} \\ &= \frac{2x^3-3x^2+x+4x^2-6x+2+x-4}{x^2-2} = \frac{2x^3+x^2-4x-2}{x^2-2} \\ &= \frac{2x(x^2-2)+x^2-2}{x^2-2} = \frac{(x^2-2)(2x+1)}{x^2-2} = 2x+1. \end{aligned}$$

(β) Για $x = 2010$ η προηγούμενη παράσταση γίνεται ίση με την A , οπότε θα έχουμε:

$$A = K(2010) = 2 \cdot 2010 + 1 = 4021.$$

Πρόβλημα 2

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} = \frac{1}{c^2},$$

με άγνωστο το x , έχει ρίζες στο \mathbb{R} , για όλες τις τιμές των παραμέτρων $a, b, c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$.

Λύση

Για $a = b$ η εξίσωση γίνεται: $\frac{2}{x-a} = \frac{1}{c^2} \Leftrightarrow x = a + 2c^2$.

Έστω $a \neq b$. Τότε η εξίσωση είναι ισοδύναμη με

$$(x-a)(x-b) = c^2(x-a+x-b), \quad \text{με } x \neq a \text{ και } x \neq b$$

$$\Leftrightarrow x^2 - (a+b+2c^2)x + ab + (a+b)c^2 = 0, \quad \text{με } x \neq a \text{ και } x \neq b \quad (1)$$

Η διακρίνουσα της δευτεροβάθμιας εξίσωσης είναι

$$\Delta = (a+b+2c^2)^2 - 4ab - 4(a+b)c^2 = (a+b)^2 - 4ab + 4c^4 = (a-b)^2 + 4c^4 > 0,$$

οπότε η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες άνισες στο \mathbb{R} που δίνονται από τις ισότητες

$$x_{1,2} = \frac{a+b+2c^2 \pm \sqrt{(a-b)^2 + 4c^4}}{2}. \quad (2)$$

Οι δύο ρίζες είναι δεκτές, αν τα a και b δεν είναι ρίζες της εξίσωσης (1). Για $x = a$ η εξίσωση γίνεται: $(a-a)(x-b) = c^2(a-a+x-b) \Leftrightarrow 0 = c^2(a-b)$, που είναι

άτοπο, αφού είναι $c \neq 0$ και έχουμε υποθέσει ότι $a \neq b$. Ομοίως καταλήγουμε σε άτοπο για $x = b$. Επομένως, για $a \neq b$, η δεδομένη εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες στο \mathbb{R} που δίνονται από τις ισότητες (2).

Πρόβλημα 3

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$y = x^3 + 2x - 2, z = y^3 + 2y - 2, x = z^3 + 2z - 2.$$

Λύση

Με αφαίρεση κατά μέλη των εξισώσεων του συστήματος λαμβάνουμε:

$$y - z = (x - y)(x^2 + xy + y^2 + 2) \quad (1)$$

$$z - x = (y - z)(y^2 + yz + z^2 + 2) \quad (2)$$

Επειδή είναι $x^2 + xy + y^2 + 2 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} + 2 > 0$ και ομοίως προκύπτει ότι

$$y^2 + yz + z^2 + 2 = \left(y + \frac{z}{2}\right)^2 + \frac{3z^2}{4} + 2 > 0, \text{ αν υποθέσουμε ότι είναι } x > y, \text{ τότε από}$$

την (1) λαμβάνουμε ότι $y > z$. Στη συνέχεια από τη σχέση (2) λαμβάνουμε $z > x$.

Έτσι έχουμε $x > y > z > x$, άτοπο.

Ομοίως καταλήγουμε σε άτοπο, αν υποθέσουμε ότι $x < y$. Επομένως έχουμε $x = y$, οπότε θα είναι και $y = z$. Τότε από τις αρχικές εξισώσεις έχουμε:

$$x = x^3 + 2x - 2 \Leftrightarrow x^3 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 1 + x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1,$$

αφού το τριώνυμο $x^2 + x + 2$ έχει διακρίνουσα $\Delta = -7 < 0$.

Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma < B\Gamma$, εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O, R)$. Οι διχοτόμοι των γωνιών \hat{A} , \hat{B} και $\hat{\Gamma}$, τέμνουν το κύκλο $c(O, R)$ στα σημεία Δ , E και Z αντίστοιχα. Από το σημείο Z , θεωρούμε παράλληλη στην $A\Gamma$, που τέμνει την $B\Gamma$ στο σημείο M . Από το σημείο E , θεωρούμε παράλληλη στην AB , που τέμνει την $B\Gamma$ στο σημείο N . Να αποδείξετε ότι:

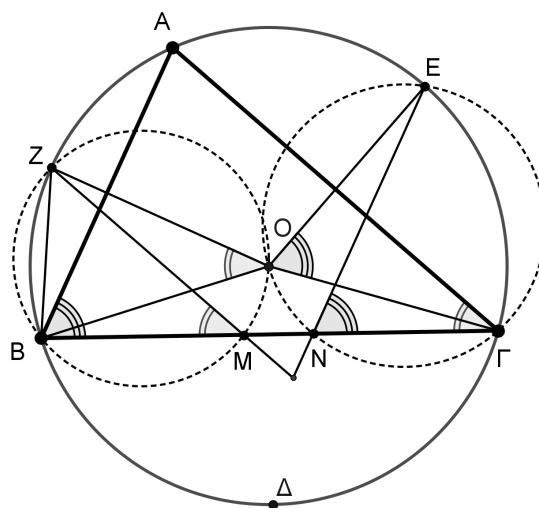
α) Τα τετράπλευρα $BMOZ$ και ΓNOE είναι εγγράψιμα σε κύκλους, έστω (c_1) και (c_2) , αντίστοιχα.

β) Το δεύτερο κοινό σημείο (έστω K) των κύκλων (c_1) και (c_2) ανήκει στο κύκλο με κέντρο το σημείο Δ και ακτίνα ΔI , όπου I το έκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$.

Λύση

α) Εφόσον η ZM είναι παράλληλη στην $A\Gamma$, θα ισχύει: $Z\hat{M}B = A\hat{\Gamma}B = \hat{\Gamma}$.

Η γωνία $Z\hat{O}B$ είναι επίκεντρη στον κύκλο $c(O, R)$ και βαίνει στο τόξο ZB (που είναι το μισό του τόξου AB). Άρα $Z\hat{O}B = \hat{\Gamma}$. Άρα είναι $Z\hat{M}B = Z\hat{O}B = \hat{\Gamma}$, οπότε το τετράπλευρο $BMOZ$ είναι εγγράψιμο.



Σχήμα 4

Ομοίως προκύπτει ότι $\hat{E}\hat{\Gamma} = \hat{E}\hat{O}\hat{\Gamma} = \hat{B}$ και ότι το τετράπλευρο $\Gamma\text{N}\text{O}\text{E}$ είναι εγγράνιμο.

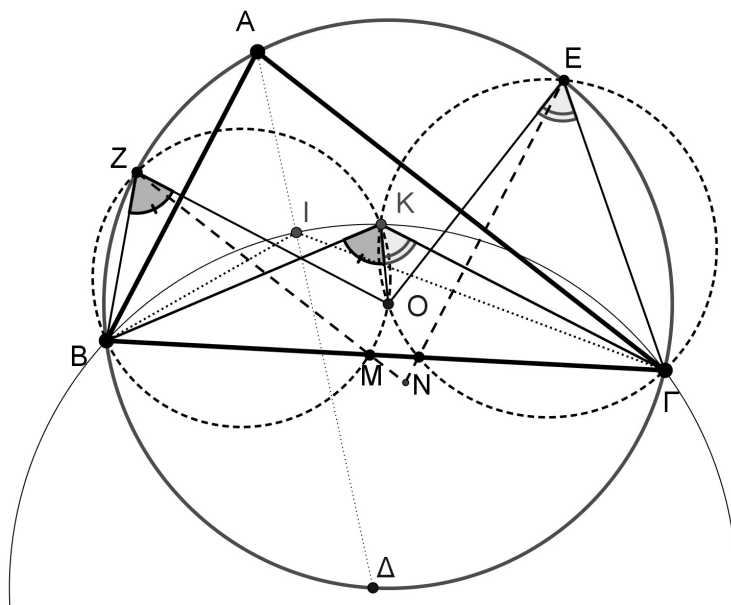
β) Επειδή το σημείο I είναι το έγκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$, θα ισχύουν οι ισότητες γωνιών:

$$\Delta\hat{I}B = \Delta\hat{B}I = \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2} \text{ και } \Delta\hat{I}\Gamma = \Delta\hat{\Gamma}I = \frac{\hat{A} + \hat{\Gamma}}{2}.$$

Από τις προηγούμενες ισότητες προκύπτει ότι $\Delta B = \Delta I = \Delta\Gamma$ και επίσης εύκολα προκύπτει ότι: $B\hat{I}\Gamma = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι τα σημεία B, I, K, Γ είναι ομοκυκλικά, δηλαδή ότι

$$B\hat{K}\Gamma = \hat{A} + \frac{\hat{B} + \hat{\Gamma}}{2} = B\hat{I}\Gamma.$$



Σχήμα 5

Το τρίγωνο OBZ είναι ισοσκελές ($OB = OZ = R$), με $\widehat{B\hat{O}Z} = \hat{\Gamma}$. Άρα $\widehat{B\hat{Z}O} = 90^\circ - \frac{\hat{\Gamma}}{2}$. Το τρίγωνο $OΓE$ είναι ισοσκελές ($OΓ = OE = R$), με $\widehat{Γ\hat{O}E} = \hat{B}$.

Άρα $\widehat{Γ\hat{E}O} = 90^\circ - \frac{\hat{B}}{2}$. Έτσι ισχύουν διαδοχικά οι ισότητες:

$$\begin{aligned}\widehat{B\hat{K}\Gamma} &= \widehat{O\hat{K}B} + \widehat{O\hat{K}\Gamma} = \widehat{B\hat{Z}O} + \widehat{Γ\hat{E}O} = 90^\circ - \frac{\hat{\Gamma}}{2} + 90^\circ - \frac{\hat{B}}{2} \\ &= 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}\right) = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2} = \widehat{B\hat{I}\Gamma}.\end{aligned}$$

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Να λυθεί στους πραγματικούς αριθμούς η εξίσωση

$$(x^2 + 3x + 2)^4 + (x^2 + x - 2)^4 = 16(x + 2)^4.$$

Λύση (1^{ος} τρόπος)

Παρατηρούμε ότι τα τριώνυμα $x^2 + 3x + 2$ και $x^2 + x - 2$ έχουν παράγοντα το $x + 2$, οπότε η εξίσωση γίνεται:

$$\begin{aligned}(x + 2)^4 \left[(x + 1)^4 + (x - 1)^4 - 16 \right] &= 0 \\ \Leftrightarrow (x + 2)^4 = 0 \text{ ή } (x + 1)^4 + (x - 1)^4 - 16 &= 0 \\ \Leftrightarrow x = -2 \text{ (με πολλαπλότητα 4) ή } 2x^4 + 12x^2 - 14 &= 0 \\ \Leftrightarrow x = -2 \text{ (με πολλαπλότητα 4) ή } x^4 + 6x^2 - 7 &= 0 \\ \Leftrightarrow x = -2 \text{ (με πολλαπλότητα 4) ή } x^2 = 1 \text{ ή } x^2 &= -7 \text{ (αδύνατη)} \\ \Leftrightarrow x = -2 \text{ (με πολλαπλότητα 4) ή } x = 1 \text{ ή } x &= -1.\end{aligned}$$

2^{ος} τρόπος

Αν θέσουμε $a = x^2 + 3x + 2$, $b = x^2 + x - 2$, τότε $a - b = 2x + 4$ και η εξίσωση γίνεται:

$$\begin{aligned}a^4 + b^4 = (a - b)^4 &\Leftrightarrow a^4 + b^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4 \\ \Leftrightarrow -ab(2a^2 - 3ab + 2b^2) &= 0 \\ \Leftrightarrow a = 0 \text{ ή } b = 0 \text{ ή } 2a^2 - 3ab + 2b^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow a = 0 \text{ ή } b = 0 \text{ ή } a = b = 0,\end{aligned}$$

αφού η εξίσωση $2a^2 - 3ab + 2b^2 = 0$, αν $ab \neq 0$, είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$2u^2 - 3u + 2 = 0, u = \frac{a}{b},$$

η οποία δεν έχει λύσεις στο \mathbb{R} . Άρα έχουμε:

$$\begin{aligned}a = 0 \text{ ή } b = 0 \text{ ή } a = b = 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 = 0 \text{ ή } x^2 + x - 2 = 0 \text{ ή } x^2 + 3x + 2 = x^2 + x - 2 = 0 \\ \Leftrightarrow x = -1 \text{ ή } x = -2 \text{ ή } x = 1 \text{ ή } x = -2 \text{ ή } x = -2 \text{ (διπλή)} \\ \Leftrightarrow x = -1 \text{ ή } x = 1 \text{ ή } x = -2 \text{ (με πολλαπλότητα 4)}\end{aligned}$$

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε την τιμή της παραμέτρου $\alpha \in \mathbb{R}$, αν το σύστημα

$$\begin{cases} \alpha(x^2 + y^2) + 2x + y = \lambda \\ 2x - y = -\lambda \end{cases}, \quad (\Sigma)$$

έχει λύση στο \mathbb{R} , δια κάθε τιμή της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$.

Λύση

Έχουμε

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha(x^2 + y^2) + 2x + y = \lambda \\ 2x - y = -\lambda \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha(x^2 + (2x + \lambda)^2) + 2x + 2x + \lambda = \lambda \\ y = 2x + \lambda \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 5\alpha x^2 + 4(\alpha\lambda + 1)x + \alpha\lambda^2 = 0 \quad (1) \\ y = 2x + \lambda \quad (2) \end{array} \right\}$$

Αν ήταν $\alpha \neq 0$, τότε η εξίσωση (1) έχει διακρίνουσα

$$\Delta = 16(\alpha\lambda + 1)^2 - 20\alpha^2\lambda^2 = 4(-\alpha^2\lambda^2 + 8\alpha\lambda + 4)$$

Επειδή το σύστημα έχει λύση στο \mathbb{R} για κάθε τιμή της παραμέτρου λ , έπεται ότι θα είναι:

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow -\alpha^2\lambda^2 + 8\alpha\lambda + 4 \geq 0. \quad (3)$$

Όμως, το τριώνυμο $-\alpha^2\lambda^2 + 8\alpha\lambda + 4$ έχει διακρίνουσα $\Delta' = 80\alpha^2 > 0$, οπότε έχει δύο πραγματικές ρίζες ετερόσημες, έστω $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ (αφού είναι $\lambda_1\lambda_2 = -\frac{4}{\alpha^2} < 0$).

Επομένως θα έχουμε $-\alpha^2\lambda^2 + 8\alpha\lambda + 4 < 0$, για $\lambda < \lambda_1$ ή $\lambda > \lambda_2$, άτοπο.

Για $\alpha = 0$ η εξίσωση (1) έχει τη λύση $x = 0$, οπότε προκύπτει ότι $y = \lambda$ και το σύστημα έχει τη λύση $(x, y) = (0, \lambda)$. Άρα είναι $\alpha = 0$.

Πρόβλημα 3

Η ακολουθία $a_n, n = 0, 1, 2, \dots$ είναι τέτοια ώστε η ακολουθία $d_n = a_n - a_{n-1}$, με $n = 1, 2, 3, \dots$ είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά $\omega = a_1 - a_0$.

1. Να προσδιορίσετε, συναρτήσει των a_0, ω και n τον γενικό όρο a_n και το άθροισμα $S_{n+1} = a_0 + a_1 + \dots + a_n$.
2. Αν είναι $a_0 = 1$ και $a_1 = 7$, να προσδιορίσετε τον ελάχιστο θετικό ακέραιο n για τον οποίο συναληθεύουν οι ανισώσεις: $a_n > 10^3$ και $S_{n+1} \leq 8 \cdot 10^3$.

Λύση

1. Σύμφωνα με την υπόθεση έχουμε:

$$d_1 = \omega, d_n = d_1 + (n-1)\omega = n\omega, n = 2, 3, \dots$$

οπότε θα είναι:

$$d_1 + d_2 + \dots + d_n = (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \dots + (a_n - a_{n-1})$$

$$\Leftrightarrow \omega + 2\omega + \dots + n\omega = a_n - a_0 \Leftrightarrow a_n = a_0 + (1 + 2 + \dots + n)\omega$$

$$\Leftrightarrow a_n = a_0 + \frac{n(n+1)}{2}\omega.$$

Για το άθροισμα S_{n+1} έχουμε:

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= a_0 + a_1 + \dots + a_n = (n+1)a_0 + \left(\frac{1 \cdot 2}{2} + \frac{2 \cdot 3}{2} + \dots + \frac{n \cdot (n+1)}{2} \right) \omega \\
&= (n+1)a_0 + \frac{1}{2} \left((1^2 + 1) + (2^2 + 2) + \dots + (n^2 + n) \right) \omega = (n+1)a_0 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (k^2 + k) \\
&= (n+1)a_0 + \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n k^2 \right) \omega + \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n k \right) \omega = (n+1)a_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \right) \omega \\
&= (n+1)a_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{n(n+1)(n+2)}{3} \right) \omega = (n+1)a_0 + \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \omega.
\end{aligned}$$

2. Αν είναι $a_0 = 1$ και $a_1 = 7$, τότε έχουμε $\omega = 6$ και

$$a_n = 1 + 3n(n+1), \quad S_{n+1} = n+1 + n(n+1)(n+2) = (n+1)[1 + n(n+2)] = (n+1)^3.$$

Έτσι έχουμε να λύσουμε το σύστημα των ανισώσεων:

$$\begin{aligned}
a_n > 10^3 \text{ και } S_{n+1} \leq 8 \cdot 10^3 &\Leftrightarrow a_n = 1 + 3n(n+1) > 10^3, \quad S_{n+1} = (n+1)^3 \leq 8 \cdot 10^3 \Leftrightarrow \\
n(n+1) > 333, \quad n+1 \leq 2 \cdot 10 &\Leftrightarrow n > 18, \quad n \leq 19 \Leftrightarrow n = 18 \text{ ή } n = 19.
\end{aligned}$$

αφού είναι $17 \cdot 18 = 306$, $18 \cdot 19 = 342$.

Άρα ο ζητούμενος ελάχιστος θετικός ακέραιος n είναι ο 18.

Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma < B\Gamma$, εγγεγραμμένο σε κύκλο (c) και Δ τυχόν σημείο της πλευράς $B\Gamma$. Η διχοτόμος της γωνίας \hat{B} , τέμνει τον κύκλο (c) στο σημείο Σ , τη διχοτόμο της γωνίας $A\hat{\Delta}B$ στο σημείο K και τη διχοτόμο της γωνίας $A\hat{\Delta}\Gamma$ στο σημείο M . Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$, τέμνει τον κύκλο (c) στο σημείο T , τη διχοτόμο της γωνίας $A\hat{\Delta}\Gamma$ στο σημείο Λ και τη διχοτόμο της γωνίας $A\hat{\Delta}B$ στο σημείο N . Να αποδείξετε ότι:

α) Τα σημεία A, I, Λ, M και A, I, K, N είναι ομοκυκλικά σε δύο διαφορετικούς κύκλους (έστω) (c_1) και (c_2) αντίστοιχα, όπου I το έγκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$.

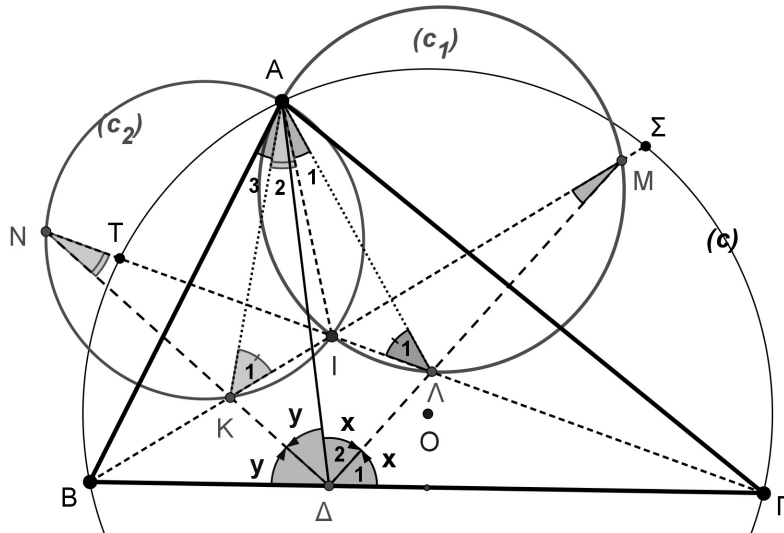
β) Αν η $A\Delta$ ταυτιστεί με το ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$, που αντιστοιχεί στη κορυφή A τότε οι κύκλοι (c_1) και (c_2) είναι ίσοι μεταξύ τους.

Λύση

α) Από την κατασκευή των διχοτόμων συμπεραίνουμε ότι τα σημεία K, Λ είναι τα έγκεντρα των τριγώνων $A\Delta B$ και $A\Delta \Gamma$ αντίστοιχα.

Ισχύει τώρα η ισότητα των γωνιών:

$$\hat{A}_1 = I\hat{A}\Gamma - \Lambda\hat{A}\Gamma = \frac{\hat{A}}{2} - \frac{\Delta\hat{A}\Gamma}{2} = \frac{\hat{A}}{2} - \frac{180^\circ - 2\hat{x} - \hat{\Gamma}}{2} = \frac{\hat{A}}{2} - 90^\circ + \hat{x} = \hat{x} - \frac{\hat{B}}{2}$$



Σχήμα 6

Από το τρίγωνο ΜΔΒ έχουμε: $\hat{x} = \hat{M} + \frac{\hat{B}}{2} \Leftrightarrow \hat{M} = \hat{x} - \frac{\hat{B}}{2}$, δηλαδή $\hat{A}_1 = \hat{M} = \hat{x} - \frac{\hat{B}}{2}$.

Άρα το τετράπλευρο ΑΙΛΜ είναι εγγράψιμο.

Ισχύει επίσης η ισότητα των γωνιών:

$$\hat{A}_2 = \hat{I}\hat{A}\hat{B} - \hat{K}\hat{A}\hat{B} = \frac{\hat{A}}{2} - \frac{\Delta\hat{A}\hat{B}}{2} = \frac{\hat{A}}{2} - \frac{180^\circ - 2\hat{y} - \hat{B}}{2} = \frac{\hat{A}}{2} - 90^\circ + \frac{\hat{B}}{2} + \hat{y} = \hat{y} - \frac{\hat{\Gamma}}{2}.$$

Από το τρίγωνο ΝΔΓ έχουμε: $\hat{y} = \hat{N} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} \Leftrightarrow \hat{N} = \hat{y} - \frac{\hat{\Gamma}}{2}$, δηλαδή $\hat{A}_2 = \hat{N} = \hat{y} - \frac{\hat{\Gamma}}{2}$.

Άρα το τετράπλευρο ΑΙΚΝ είναι εγγράψιμο.

β) Εφόσον I είναι το έγκεντρο του τριγώνου ABΓ, θα ισχύουν οι ισότητες γωνιών:

$$\hat{A}\hat{I}\hat{B} = \hat{\Gamma} + \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2} = 90^\circ + \frac{\hat{\Gamma}}{2} \text{ και } \hat{A}\hat{I}\hat{\Gamma} = \hat{B} + \frac{\hat{A} + \hat{\Gamma}}{2} = 90^\circ + \frac{\hat{B}}{2}.$$

Από το τρίγωνο ΑΙΚ έχουμε:

$$\hat{K}_1 = 180^\circ - \hat{A}\hat{I}\hat{B} - \hat{A}_2 = 180^\circ - 90^\circ - \frac{\hat{\Gamma}}{2} - \hat{N} = 90^\circ - \frac{\hat{\Gamma}}{2} - \hat{y} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} = 90^\circ - \hat{y}.$$

Από το τρίγωνο ΑΙΛ έχουμε:

$$\hat{\Lambda}_1 = 180^\circ - \hat{A}\hat{I}\hat{\Gamma} - \hat{A}_1 = 180^\circ - 90^\circ - \frac{\hat{B}}{2} - \hat{M} = 90^\circ - \frac{\hat{B}}{2} - \hat{x} + \frac{\hat{B}}{2} = 90^\circ - \hat{x}.$$

Αν τώρα υποθέσουμε ότι $A\Delta \perp B\Gamma$ τότε $\hat{x} = \hat{y} = 45^\circ$, οπότε $\hat{K}_1 = \hat{\Lambda}_1$.

Άρα οι κύκλοι (c_1) και (c_2) είναι ίσοι (οι ίσες γωνίες $\hat{K}_1, \hat{\Lambda}_1$ βαίνουν στη κοινή χορδή ΑΙ).

Παρατηρήσεις

α) Τα κέντρα των κύκλων (c_1) και (c_2) βρίσκονται επάνω στην ΣΤ.

β) Το σημείο Α είναι το σημείο Miquel του πλήρους τετραπλεύρου ΔΚΙΛΜΝ.