

ΡΗΤΕΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ- ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ-ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

(1) Να απλοποιήσετε τα κλάσματα

$$\frac{(3x-2y)^2}{4y^2-9x^2}, \quad \frac{x^2+4x+4}{3x^2-12}, \quad \frac{(a+\beta)^2-a\beta}{a^3\beta-\beta^4}$$

(2) Να απλοποιήσετε τα κλάσματα

i) $\frac{x^2+x-12}{x^2+2x-8}$ ii) $\frac{4x^2+4xy+y^2}{4x^3-xy^2}$ iii)

(3) Να γίνουν οι παρακάτω πράξεις

$$\frac{1}{2x-4} - \frac{1}{3x-6} + \frac{x+8}{3x^2-12} - \frac{2x+4}{x^2-2x} + \frac{3x+2}{x^2+2x} - \frac{6x+4}{x^2-4}$$

(4) Να γίνουν οι πράξεις:

$$\frac{x+2}{y-4} \cdot \frac{y^2-xy}{4-x^2} \cdot (x+4) \cdot \frac{x^2y}{x^2-16}, \quad \frac{x^2-25}{x^2-1} \cdot \frac{x^2-3x+2}{x^2-6x+5}$$

(5) Να γίνουν οι πράξεις:

$$\frac{a^{2v}-1}{x^2} \cdot \frac{x^2}{a^v+1}, \quad \frac{x^4-x^2-4x+4}{x^3+8} \cdot \frac{x^2-4x+4}{x^3-4x}$$

(6) Να γίνουν οι πράξεις:

i) $\frac{1}{x^2-3x+2} + \frac{1}{x^2-x-2} + \frac{1}{x^2-1}$ ii)

(7) Να γίνουν οι πράξεις:

$$\frac{3a+6}{a^2+4a+4} + \frac{a-3}{a^2+2a} - \frac{3}{a+2}$$

(8) Να γίνουν οι πράξεις:

$$\left(\frac{2a}{a^2-\beta^2} + \frac{3}{a-\beta} - \frac{1}{a+\beta} \right) \cdot \left(\frac{a}{\beta} + \frac{\beta}{a} - 2 \right)$$

(9) Να γίνουν οι πράξεις:

$$\frac{1}{1+\frac{3}{x}} + \frac{1}{\frac{x}{3}-1} - \frac{2}{\frac{x}{3}-\frac{3}{x}}$$

(10) Να γίνουν οι πράξεις:

$$\frac{3}{1+\frac{a}{\beta+\gamma}} + \frac{3}{1+\frac{\beta}{\gamma+a}} + \frac{3}{1+\frac{\gamma}{a+\beta}}$$

(11) Να γίνουν οι πράξεις:

$$\frac{\alpha}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)} + \frac{\beta}{(\beta - \gamma)(\beta - \alpha)} + \frac{\gamma}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)}$$

(12) Να γίνουν οι πράξεις:

$$\frac{y}{2} \cdot \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y} \right) + \frac{x^2 - y^2}{x^2 y - x y^2} \cdot (x+y)$$

(13) Να γίνουν οι πράξεις:

$$\left(\frac{x}{y} - 1 \right) \left(\frac{x}{y} + 1 \right) \left(1 - \frac{x^2}{x^2 - y^2} \right)$$

(14) Να γίνουν οι πράξεις:

$$\left(1 + \frac{\alpha}{\beta} \right) : \left(1 - \frac{\alpha^2}{\beta^2} \right) + \left(1 - \frac{\beta}{\alpha} \right) : \left(1 - \frac{2\beta}{\alpha} + \frac{\beta^2}{\alpha^2} \right)$$

(15) Αν για τους μη μηδενικούς αριθμούς α , β , x , y ισχύει ότι $\alpha y = \beta x$, να

αποδείξετε ότι η παράσταση $A = \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}$ είναι ίση με 1.

(16) Δίνονται τα κλάσματα $A = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 2x}$ και $B = \frac{x^2 - 2x - 8}{x - 4}$

- α) Να καθορίσετε τα πεδία ορισμού των κλασμάτων A και B
β) Να υπολογίσετε την παράσταση $A-B$.

(17) Αν είναι $x = 3\sqrt{2} - 2$ και $y = 3\sqrt{3} + 2$ τότε να υπολογίσετε την

παράσταση: $\frac{x^2 y^2}{xy}$

ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ - ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

(1) Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$(α) \frac{x^2 - x - 1}{x - 1} - \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} = \frac{x}{2 \cdot (x^2 - 1)}$$

$$(β) \frac{5x}{x^2 + x - 6} + \frac{2x - 5}{x^2 - x - 12} = \frac{7x - 10}{x^2 - 6x + 8}$$

$$(γ) \frac{3x}{x^2 - x - 2} + \frac{2x + 5}{x^2 - 2x - 3} = \frac{5x - 1}{x^2 - 5x + 6}$$

$$(δ) \frac{5x}{x^2 + x - 6} + \frac{2x - 5}{x^2 - x - 12} = \frac{7x - 10}{x^2 - 6x + 8}$$

$$(ε) \frac{3x - 5}{2x - 3} - \frac{2x + 3}{3x + 5} + \frac{5x^2 + 2x}{(3x + 5)(3 - 2x)} = 0$$

(2) Να απλοποιήσετε την κάτω παράσταση και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $A=9$

$$A = \frac{8x - 12}{4x^2 - 12x + 9} - \frac{5x}{2x^2 + 3x} - \frac{20x}{9 - 4x^2}$$

(3) Να απλοποιήσετε τα κλάσματα και μετά τα λύσετε την εξίσωση $A-B=0$

$$A = \frac{3x^2 - 6x}{2x^2 - 8} \quad B = \frac{9 \cdot (2x + 1)^2 - (4x - 1)^2}{4 \cdot (x^2 + 4x + 4)}$$

(4) Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$2x^2 + (1 - 2\sqrt{3})x - \sqrt{3} = 0 \quad 2x^2 + (1 + 2\sqrt{5})x + \sqrt{5} = 0$$

$$x^2 + (a + 1)x - 2a^2 + a = 0 \quad 5(x^2 - 2x) - 3(x - 2)^2 = 28 \quad 5x^2 - 3x = 0$$

$$(x - 1)^2 + (x + 2)^2 = 29 \quad 4x^2 - 9 = 0$$

(5) Για ποιες τιμές των κ, λ η εξίσωση $5x^2 + (2\kappa - 1)x + \lambda + 4 = 0$ έχει μοναδική λύση το 0;

(6) Να βρεθεί για τις διάφορες τιμές του λ το πλήθος των ριζών της εξίσωσης: $(1 - \lambda)x^2 + (3 + 2\lambda)x - \lambda = 0$

(7) Να δειχθεί ότι εάν $\beta \neq 0$ και $a > 0$ και $\frac{a}{\beta} + \frac{\beta}{a} = 2$ τότε η εξίσωση

$$x^2 + 2\sqrt{a} \cdot x + \beta = 0 \text{ έχει δυο ρίζες ίσες.}$$

(8) Για ποιες τιμές του a η $x^2 + 9 = 4ax$ είναι αδύνατη ενώ η $4x^2 + 4x + a = 0$ έχει δυο ρίζες ίσες;

- (9) Να βρεθούν οι τιμές των κ, λ ώστε η εξίσωση $x^2 + (\kappa - 1) \cdot x - \lambda^2 = 0$ να έχει διπλή ρίζα η οποία και να βρεθεί.
- (10) Να λυθεί η εξίσωση $\left(\frac{1}{x+1} + \frac{x}{x-1}\right) : \left(\frac{x}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right) = -1$
- (11) Να λυθεί η εξίσωση $2x^{-2} - 5x^{-1} + 3 = 0$
- (12) Να λυθεί η εξίσωση $x^{-2} - 4x^{-1} + 3 = 0$
- (13) Να λυθεί η εξίσωση $\left(x - \frac{3}{x}\right)^2 - \left(x - \frac{3}{x}\right) - 2 = 0$
- (14) Αν $A = 4x^2 + 12x + 9$, $B = 4x^2 - 2x$ και $\Gamma = (x-2)^2 - 9$, τότε να λυθούν οι εξισώσεις: $A = 0$, $B = 0$, $\Gamma = 0$, $\frac{\Gamma}{B} = 0$
- (15) Δίνονται τα πολυώνυμα $A(x) = 3x^2 - 9$ και $B(x) = (x-1)^2$
α) Να βρείτε το πολυώνυμο $\Gamma = A - B$ και
β) Να λύσετε τις εξισώσεις $A = 0$, $B = 0$ και
- (16) Δίνεται η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$ ($a \neq 0$) Αν $a + \gamma = \beta$ τότε οι ρίζες της εξίσωσης είναι οι $x = -1$ και $x = -\frac{\gamma}{a}$
- (17) Δίνεται η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$ ($a \neq 0$) Αν $a + \gamma = -\beta$ τότε οι ρίζες της εξίσωσης είναι: $x = 1$ και $x = \frac{\gamma}{a}$
- (18) Δίνονται τα κλάσματα $A = \frac{3x^2 + 6x}{x^2 - 4}$ και $B = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - x - 2}$
α) Να καθορίσετε το πεδίο ορισμού των κλασμάτων A και B .
β) Να τα απλοποιήσετε και
γ) Να λύσετε την εξίσωση $A = B$.
- (19) Το άθροισμα ενός αριθμού και του εξαπλάσιου του αντίστροφού του είναι 5. Να βρείτε τον αριθμό.
- (20) Να βρείτε έναν αριθμό ο οποίος αυξανόμενος κατά 17 γίνεται ίσος με το εξηκονταπλάσιο του αντίστροφου του.
- (21) Βρείτε δυο διαδοχικούς ακέραιους που έχουν γινόμενο 182.
- (22) Βρείτε δυο φυσικούς αριθμούς που έχουν διαφορά 2 και γινόμενο 8.

- (23) Να βρείτε τρεις διαδοχικούς άρτιους ακέραιους αριθμούς τέτοιους ώστε το τετράγωνο του μεσαίου να είναι κατά 408 μικρότερο από το άθροισμα των τετραγώνων των δυο άλλων.
- (24) Αγόρασε κάποιος τετράδια και έδωσε 600 €. Αν το κάθε τετράδιο κόστιζε 1 € λιγότερο, με τα ίδια χρήματα θα αγόραζε ένα τετράδιο παραπάνω. Πόσα τετράδια αγόρασε;
- (25) Ο αριθμητής ενός κλάσματος με όρους θετικούς είναι κατά 2 μικρότερος από τον παρονομαστή. Αν και οι δυο όροι ελαττωθούν κατά 1, το κλάσμα ελαττώνεται κατά $\frac{1}{21}$. Να βρείτε το κλάσμα.