ΟΡΙΑ-ΣΥΝΕΧΕΙΑ

ΒΑΣΙΚΑ ΟΡΙΑ

Έστω μια συνάρτηση f η οποία ορίζεται όσο κοντά θέλουμε στο x_0 ,δηλαδή ορίζεται τουλάχιστον σ' ένα από τα σύνολα $(\alpha, x_0)\cup(x_0,\beta)$ ή (α, x_0) ή (x_0,β).
Όταν οι τιμές της $f(x)$ προσεγγίζουν όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό ℓ ,καθώς το x προσεγγίζει με οποιοδήποτε τρόπο τον αριθμό x_0 ,τότε γράφουμε
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$

Ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες :

1. Αν $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+........+\alpha_1 x+\alpha_0$ ένα πολυώνυμο του x τότε
$\lim\limits_{x\to x_o} P(x)=P(x_o)$

2. Αν $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ με P(x), Q(x) πολυώνυμα με $Q(x_o)\neq 0$ τότε

$$\lim_{x\to x_o}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x_o)}{Q(x_o)}$$

3. $\lim\limits_{x\to x_o} \eta\mu x=\eta\mu x_o$ και $\lim\limits_{x\to x_o} \sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu x_o$

4. Όρια και πράξεις

Υπό την προϋπόθεση ότι τα $\lim\limits_{x\to x_o}$ f(x) και $\lim\limits_{x\to x_o}$ g(x) υπάρχουν και είναι πραγματικοί αριθμοί ισχύουν οι ιδιότητες

1. $\lim\limits_{x\to x_o} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to x_o} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_o} g(x)$
2. $\lim\limits_{x\to x_o} (\lambda f(x)) = \lambda \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, λ σταθερά
3. $\lim\limits_{x\to x_o} (f(x)g(x)) = \lim\limits_{x\to x_o} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_o} g(x)$ (ισχύει και για περισσότερες από 2 συναρτήσεις)
4. $\lim\limits_{x\to x_o} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_o} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_o} g(x)}$ ($\lim\limits_{x\to x_o} g(x)\neq 0$)
5. $\lim\limits_{x\to x_o} |f(x)| = |\lim\limits_{x\to x_o} f(x)|$
6. $\lim\limits_{x\to x_o} f^\nu(x) = (\lim\limits_{x\to x_o} f(x))^\nu$
7. $\lim\limits_{x\to x_o} \sqrt[\nu]{f(x)} = \sqrt[\nu]{\lim\limits_{x\to x_o} f(x)}$ ($\lim\limits_{x\to x_o} f(x) \geq 0$)
8. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-\ell)=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$
9. Το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, αν υπάρχει, είναι μοναδικό

<u>Παρατήρηση</u>

Αν $\lim\limits_{x\to x_o} (f(x)+g(x)) = 5$ και $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = 2$ δεν μπορούμε να γράψουμε

$\lim\limits_{x\to x_o} f(x) + \lim\limits_{x\to x_o} g(x) = 5 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_o} g(x) = 3$ (αφού δεν γνωρίζουμε την ύπαρξη του)

$\lim\limits_{x\to x_o} g(x)$ ή για παράδειγμα να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to x_o} (x\,ημ\frac{1}{x})$ είναι λάθος να πούμε

$\lim\limits_{x\to x_o} (x\,ημ\frac{1}{x}) = 0$ επειδή $\lim\limits_{x\to x_o} x = 0$.

5. Α. Όταν οι τιμές της $f(x)$ προσεγγίζουν όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό ℓ_1, καθώς το x προσεγγίζει από μικρότερες τιμές τον αριθμό x_0 $(x < x_0)$, τότε γράφουμε $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \ell_1$. Το ℓ_1 το ονομάζουμε αριστερό πλευρικό όριο της f στο x_0.

Β. Όταν οι τιμές της $f(x)$ προσεγγίζουν όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό ℓ_2, καθώς το x προσεγγίζει από μεγαλύτερες τιμές τον αριθμό x_0 $(x > x_0)$, τότε γράφουμε $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \ell_2$. Το ℓ_2 το ονομάζουμε δεξιό πλευρικό όριο της f στο x_0.

Αν η f(x) δίνεται με διαφορετικούς τύπους εκατέρωθεν του x_o τότε παίρνουμε πλευρικά όρια και χρησιμοποιούμε το παρακάτω θεώρημα:

$$\lim_{x\to x_o^-} \ell im_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_o} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x\to x_o} f(x) = \ell$$

(Αν $\lim\limits_{x\to x_o^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_o^-} f(x)$ δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)$)

Αν η f ορίζεται μόνο δεξιά του x_0 τότε το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ ταυτίζεται με το $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ (αν αυτό υπάρχει).

Αν η f ορίζεται μόνο αριστερά του x_0 τότε το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ ταυτίζεται με το $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ (αν αυτό υπάρχει).

<u>Παράδειγμα</u>

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 4 & , x < 1 \\ \frac{-1}{x} & , x > 1 \end{cases}$

Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

<u>Λύση</u>

Είναι:

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (3x^2-4) = -1$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (-\frac{1}{x}) = -1$ Επομένως $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -1$

Παρατηρούμε ότι η f δεν ορίζεται για x=1, παρ' όλα αυτά υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

Η ύπαρξη του $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ δεν εξαρτάται από το αν ορίζεται η f(x) στο x_o

Επίσης μπορεί να ορίζεται το f(x₀) και το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq$ **f(x₀)**

<u>Βασική παρατήρηση:</u>

- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = \ell$ δεν έπεται $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$ ή $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\ell$
- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$

<u>Γνωρίζουμε ότι:</u>

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\eta\mu x}{x} = 1$ και $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x} = 0$

<u>Παρατηρήσεις:</u>

1η. Για να βρούμε το $\ell\text{im}_{x\to x_0} f(x)$ εφαρμόζουμε τις ιδιότητες. Για παράδειγμα

$$\lim_{x\to 1} \sqrt{x^3 - x^2 + x + 1} = \sqrt{\lim_{x\to 1}(x^3 - x^2 + x + 1)} = \sqrt{2}$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu x - x}{x + \frac{\pi}{2}} = \frac{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\eta\mu x - x)}{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(x + \frac{\pi}{2})} = \frac{\eta\mu\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}} = \frac{1 - \frac{\pi}{2}}{\pi}$$

Όταν όμως δεν μπορούμε να κάνουμε εφαρμογή των ιδιοτήτων τότε **μετασχηματίζουμε** τον τύπο της f . Για παράδειγμα :

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = \lim_{x\to 1} (x-2) = -1$$

Γενικά για να βρούμε το $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{A(x)}{B(x)}$, **όπου** $\lim\limits_{x\to x_0} A(x) = \lim\limits_{x\to x_0} B(x) = 0$**,** **μετασχηματίζουμε την** $f(x) = \dfrac{A(x)}{B(x)}$ **ώστε να απλοποιήσουμε το** $x - x_0$**.**

<u>1ος Μετασχηματισμός</u> (με ριζικά)

Παράδειγμα

Να βρεθούν τα όρια α) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\sqrt{x+1} - 1}{x^2 + x}$ β) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{3x^2+4} - 4}$

Λύση

α) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\sqrt{x+1} - 1}{x^2 + x} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{x+1-1}{x(x+1)(\sqrt{x+1}+1)} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{(x+1)(\sqrt{x+1}+1)} = \dfrac{1}{2}$

β) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{3x^2+4} - 4}$, θα ήταν λάθος να πούμε $\dfrac{\lim\limits_{x\to 2}(\sqrt{x+2} - 2)}{\lim\limits_{x\to 2}(\sqrt{3x^2+4} - 4)} = \dfrac{0}{0}$

(απροσδιόριστη)

Επομένως :

$f(x) = \dfrac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{3x^2+4} - 4} = \dfrac{(x+2-4)(\sqrt{3x^2+4}+4)}{(3x^2+4-16)(\sqrt{x+2}+2)} =$

$$=\frac{(x+2)(\sqrt{3x^2+4}+4)}{3(x-2)(x+2)(\sqrt{x+2}+2)}=\frac{\sqrt{3x^2+4}+4}{3(x+2)(\sqrt{x+2}+2)}$$ συνεπώς

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{3x^2+4}+4}{3(x+2)(\sqrt{x+2}+2)}=\frac{\lim_{x\to 2}(\sqrt{3x^2+4}+4)}{\lim_{x\to 2}3(x+2)\lim_{x\to 2}(\sqrt{x+2}+2)}=\frac{1}{6}$$

2ος Μετασχηματισμός.
Όταν δίνεται το όριο μιας παράστασης που περιέχει μια συνάρτηση.

Παράδειγμα

Αν $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2}{x+1}=2$ να βρεθεί το $\lim_{x\to 1}\frac{xf(x)+x^2+1}{x+1}$

Λύση

Είναι:

$$\frac{f(x)-2}{x+1}=g(x)\Leftrightarrow f(x)=g(x)\,(x+1)+2$$

και

$$\frac{xf(x)+x^2+1}{x+1}=\frac{xg(x)(x+1)+2x+x^2+1}{x+1}=\frac{(x+1)xg(x)+(x+1)^2}{x+1}=xg(x)+x+1$$

ώστε $\lim_{x\to 1}\frac{xf(x)+x^2+1}{x+1}=\lim_{x\to 1}(xg(x)+x+1)=\lim_{x\to 1}xg(x)+\lim_{x\to 1}(x+1)=-2$

Θεώρημα

Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, τότε ισχύει η ισοδυναμία :

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\ell \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)=\ell$$

(Όταν αριστερά -δεξιά του x_o αλλάζει ο τύπος παίρνουμε πλευρικά όρια.)

Παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}3x+\alpha & ,x>1\\ x+2 & ,x\le 1\end{cases}$

Να βρεθεί ο α ώστε να υπάρχει το $\lim_{x\to 1}f(x)$.

Λύση

Για να υπάρχει το $\lim_{x\to 1}f(x)$ πρέπει

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^+}f(x)\Leftrightarrow \lim_{x\to 1^-}(x+2)=\lim_{x\to 1^+}(3x+9)\Leftrightarrow 3=3+\alpha\Leftrightarrow \alpha=0$$

Βασικό θέμα:

Αν το $\lim_{x\to x_o}\frac{A(x)}{\Pi(x)}=\ell\in R$ και $\lim_{x\to x_o}\Pi(x)=0$ τότε να δείξετε ότι: $\lim_{x\to x_o}A(x)=0$

Απόδειξη:

Έστω $f(x) = \dfrac{A(x)}{\Pi(x)} \Leftrightarrow A(x) = f(x)\Pi(x)$, οπότε

$$\lim_{x\to x_o} A(x) = \lim_{x\to x_o} f(x) \lim_{x\to x_o} \Pi(x) = \ell \cdot 0 = 0$$

<u>Παράδειγμα:</u>

Να βρεθεί η τιμή του $\alpha \in R$ ώστε το $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^2+3}-\alpha x}{x-1}$ να' ναι πραγματικός αριθμός .

<u>Λύση:</u>

Επειδή

$\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$ και $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^2+3}-\alpha x}{x-1} \in R$ πρέπει

$\lim\limits_{x\to 1}(\sqrt{x^2+3}-\alpha x)=0 \Leftrightarrow 2\text{-}\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha=2.$

Κάνουμε επαλήθευση για α=2, οπότε:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2+3}-2x}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+3-4x^2}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2x)} = \lim_{x\to 1} \frac{-3(x-1)(x+1)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2x)}$$

$$= -3 \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2x} = -\frac{3}{2} \in R$$

Όταν το όριο ενός κλάσματος θέλουμε να είναι πραγματικός αριθμός και το όριο του παρονομαστή είναι μηδέν, τότε πρέπει το όριο του αριθμητή να είναι μηδέν. Στη συνέχεια αντικαθιστούμε την παράμετρο που βρήκαμε στο κλάσμα και βρίσκουμε το όριο.

<u>Παράδειγμα</u>:

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+1}-\alpha}{x} & ,-1<x<0 \\ x+\beta, & x>0 \end{cases} \qquad \text{όπου } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

Να βρεθούν οι τιμές των α ,β ώστε το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ να είναι πραγματικός .

<u>Λύση:</u>

Πρέπει

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sqrt{x+1}-\alpha}{x} = \ell$ (1) και

$\lim\limits_{x\to 0^+}(x+\beta) = \ell$ (2)

Από την (1) επειδή $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$, πρέπει

$\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{x+1}\text{-}\alpha) = 0 \Leftrightarrow 1\text{-}\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha=1$

Από την (1) :

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1}+1)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{1}{2}=\ell$$

Από την (2)

$$\lim_{x\to 0^+}(x+\beta)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \beta=\frac{1}{2}$$

Εύρεση του $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$

Όταν $\lim_{x\to x_o} g(x) = \lim_{x\to x_o} f(x) = 0$ τότε μετασχηματίζουμε το $\frac{f(x)}{g(x)}$ με σκοπό να απλοποιήσουμε το $x-x_0$ δηλαδή προσπαθούμε να εμφανίσουμε το $(x-x_0)$ στον αριθμητή και στον παρονομαστή. Αυτό το πετυχαίνουμε κάνοντας τον κατάλληλο μετασχηματισμό στην κάθε περίπτωση.

<u>Ασκήσεις</u>

1. Να βρεθούν τα :

α) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3x^2+1}-2}{x-1}$ β) $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x-3}-\sqrt{5-2x}}{x^2-3x+2}$ γ) $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-\sqrt{4x+1}}{\sqrt{3x^2+4}-4}$

2. Να προσδιοριστεί ο $\alpha\in R$ ώστε η συνάρτηση $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+3}-\alpha x}{x^2-1}$ να έχει στο 1 όριο πραγματικό αριθμό.

3. Να βρεθούν οι τιμές των α , β ώστε $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-\alpha x-\beta}{x}=2$

4. Έστω οι συναρτήσεις $f,g : R\to R$ με $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x^2-4}=3$ και $\lim_{x\to 2}[g(x)(1-\sqrt{x-1})]=5$.
Να βρεθεί το $\lim_{x\to 2} f(x)g(x))$

5. Αν $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2}{x+1}=2$ να βρεθεί το $\lim_{x\to 1}\frac{xf(x)+x^2+1}{x+1}$

6. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2\alpha x-\alpha & ,x\geq -1\\ \dfrac{x^2-\beta}{x+1} & ,x<-1\end{cases}$$

Να βρεθούν οι τιμές των α , β ώστε να υπάρχει το $\lim_{x\to -1} f(x)$

7. Αν $\lim_{x\to \alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=\lambda$, $\lambda\in R$ να δείξετε ότι $\lim_{x\to \alpha}\frac{xf(\alpha)-\alpha f(x)}{x-\alpha}=f(\alpha)-\lambda\alpha$

8. Έστω η συνάρτηση f: R→R με $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-4}{x-1}=2$

Να βρεθεί το $\lim_{x\to 1}\frac{f^2(x)-f(x)-12}{x^2+x-2}$

Όρια με απόλυτα

Θεώρημα :

Αν $\lim_{x\to x_o} f(x) > 0$ τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_o

Αν $\lim_{x\to x_o} f(x) < 0$ τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_o

Παράδειγμα 1

Να βρεθεί το $\lim_{x\to 0}\frac{|x^2-1|-1}{x}$

Λύση :

Το πεδίο ορισμού της f είναι Df = R* και παρατηρούμε ότι $\lim_{x\to 0}(|x^2-1|-1)= \lim_{x\to 0} x = 0$. Για να βρούμε το $\lim_{x\to 0} f(x)$ πρέπει να απαλλαγούμε από τα απόλυτα.

Επειδή $\lim_{x\to 0}(x^2-1)=-1<0$ είναι $x^2-1<0$ κοντά στο 0 οπότε :

$f(x) = \frac{1-x^2-1}{x} = -x$ συνεπώς

$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}(-x) = 0$

Αν έχουμε τη μορφή ($\frac{0}{0}$) και κανένα απόλυτο δεν μηδενίζεται στο x_o, τότε βρίσκουμε τα όρια των συναρτήσεων που είναι μέσα στα απόλυτα και με την βοήθεια του παραπάνω θεωρήματος διώχνουμε τα απόλυτα, όπως το παράδειγμα 1.

Παράδειγμα 2

Να βρεθεί το $\lim_{x\to 0}\frac{|x^2-1|-1}{|x^2-x|}$

Λύση :

Το πεδίο ορισμού της f είναι το D_f = R – {0,1}, όπου $f(x)=\frac{|x^2-1|-1}{|x^2-x|}$

Παρατηρούμε ότι $\lim_{x\to 0}|x^2-x| = \lim_{x\to 0}(|x^2-1|-1) = 0$

- Αν x ∈ (-1,0) τότε $f(x) = \frac{1-x^2-1}{x^2-x} = \frac{-x^2}{x(x-1)} = \frac{x}{1-x}$

  $\lim_{x\to 0^-} f(x)= \lim_{x\to 0^-}\frac{x}{1-x} = 0$

- Αν x ∈ (0,1) τότε $f(x) = \frac{1-x^2-1}{x-x^2} = \frac{-x^2}{x(1-x)} = -\frac{x}{1-x}$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{1-x} = 0$$

Ώστε: $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

Αν έχουμε τη μορφή (%) και κάποιο απόλυτο μηδενίζεται στο x_0, τότε για την εύρεση του $\lim_{x\to x_o}$ f(x) παίρνουμε πλευρικά όρια (όπως στο παράδειγμα 2)

<u>Παράδειγμα 3</u>

Αν $\lim_{x\to 1} f(x) = 5$, πόσο ισούται η παράσταση A = | f(x)-2 | + | f(x)-7 | κοντά στο 1 ;

Λύση

Επειδή

$\lim_{x\to 1}(f(x)-2) = 3 > 0$ και $\lim_{x\to 1}(f(x)-7) = -2 < 0$ με τη βοήθεια του θεωρήματος

είναι:

f(x) -2 >0 και f(x) -7 <0 κοντά στο 1. Επομένως

A = f(x)-2 +7 - f(x) = 5

Στην περίπτωση όπου δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε το πρόσημο της παράστασης που είναι μέσα στο απόλυτο θα κάνουμε εφαρμογή της πρότασης Αν $\lim_{x\to x_o}$ f(x)>0 τότε f(x)>0 κοντά στο x_0 (όμοια αν $\lim_{x\to x_o}$ f(x)<0 τότε f(x)<0)

<u>Παράδειγμα 4</u>

Να βρείτε το $\lim_{x\to 1} \frac{|x^3+x-1|+x^2-2x}{x-1}$

Λύση:

Είναι

$\lim_{x\to 1}(x^3+x-1) = 1 > 0$ οπότε $x^3+x-1 > 0$ κοντά στο 1.

Οπότε ο τύπος της f κοντά στο 1 γίνεται :

$$f(x) = \frac{x^3+x-1+x^2-2x}{x-1} = \frac{x^3+x^2-x-1}{x-1} =$$

$$= \frac{x(x^2-1)+x^2-1}{x-1} = x^2+2x+1 \quad , \text{ άρα}$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}(x^2+2x+1) = 4$$

<u>Ασκήσεις με απόλυτα</u>

1.Να υπολογιστούν τα όρια

α) $\lim_{x\to 0} \frac{|1-x^2|+x-1}{x}$ β) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2-5|x-2|-4}{|x|-2}$ γ) $\lim_{x\to -1} \frac{|x^2-1|-x^2+x+2}{\sqrt{x+2}-1}$

δ) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|x^3-x-1|-|x-7|}{x^2-4}$ ε) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2|x-1|+|x|-1}{x^2-1}$

2. Έστω η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)-1-x^2\eta\mu x}{x^2+x}$ όπου f συνάρτηση ορισμένη στο R.

Αν $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=3$ να υπολογιστούν τα $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|f(x)|-1}{x}$

3. Αν είναι $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-1}{x-2}=1$ να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|f(x)-x|-1}{x-2}$

ΠΡΟΣΟΧΗ: **α)** Αν $\lim\limits_{x\to x_o}|f(x)|=\ell$ δεν έπεται $\lim\limits_{x\to x_o}f(x)=\pm\ell$

β) Αν $\lim\limits_{x\to x_o}|f(x)|=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_o}f(x)=0$