



Ασκήσεις για τις διακοπές των Χριστουγέννων

Μαθηματικά Γ' γυμνασίου

Ταυτότητες - Παραγοντοποίηση

mondobimbo.altervista.org

- (1) Να γίνουν οι πράξεις :
- $(x+4)^2 - (x+5)(x-5) - 5(3x-1)$
 - $(3x+4)^2 - (2x-3)^2 - (5x+4) \cdot (5x-4)$
 - $(x+2)^2 - (x+3) \cdot (x-3) - 2(2x-3)$
- (2) Να κάνετε τις πράξεις :
- $-2(1-3x)^2 + 4(2x+3)^2 + 5(x+2) \cdot (x-2) - 3x^2$
 - $2(a-2\beta)^2 - 3(a+3\beta)^2 - (2a+3\beta) \cdot (3a-2\beta)$
 - $(2x+1)^2 - (3x-2)^2 - (2x+5) \cdot (5-2x)$
- (3) Να γίνουν οι πράξεις :
- $(x-1)^3 - 2(3x+2)^3 - x(x+2) \cdot (x-2)$
 - $(x+y)^3 - y(x-y)(x+y) + x(x-y)^2$
 - $(x+2)^3 - 3x(x-1)^2 + (x+1) \cdot (x-1)(x-2)$
 - $(a+2\beta)^3 - (2a-\beta)^3 - (a-\beta)^2(a+\beta)$
- (4) Αν $\alpha = \sqrt{5} - \sqrt{3}$ και $\beta = \sqrt{5} + \sqrt{3}$, να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = 2\alpha\beta - 3\alpha^2 + 3\beta^2$.
- (5) Να αποδείξετε τις ισότητες :
- $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 = \alpha\beta$
 - $(\alpha^2 + \beta^2)(x^2 + y^2) = (\alpha x + \beta y)^2 + (\alpha y - \beta x)^2$
 - $(\alpha^2 - \beta^2)^2 + (2\alpha\beta)^2 = (\alpha^2 + \beta^2)^2$
- (6) Να αντικατασταθεί ο αστερίσκος έτσι ώστε να προκύψουν τέλεια τετράγωνα
- α) $25x^2 + 30x + *$, β) $x^2 + \frac{1}{16} + *$, γ) $9x^4 - 12x^2 \cdot y^2 + *$.
- (7) Να συμπληρώσετε τις ισότητες :
- α) $(x + \dots)^2 = \dots + 2x + \dots$
- β) $(\dots - 3a)^2 = 25x^2 - \dots + \dots$



$$\gamma) (\dots + a^2)^3 = 8\beta^3 + \dots + \dots + \dots$$

$$\delta) \left(\frac{1}{2}x - \dots\right)^3 = \dots - \dots + \dots - \frac{8}{27}y^3$$

mondobimbo.altervista.org

(8) Να συμπληρώσετε τις ισότητες :

α) $(2 + \dots)^2 = \dots + \dots + 25x^2$

β) $(3a - \dots) = \dots - 6a\beta + \dots$

γ) $(\dots + 2\beta)^3 = a^3 + \dots + \dots + \dots$

δ) $(\dots + \dots)^2 = 9a^2 + \dots + \beta^2$

ε) $(\dots - 2\kappa)^2 = \dots + 2\kappa + \dots$

στ) $(a + \dots)^3 = \dots + 6a^2\beta + \dots + \dots$

ζ) $(\dots - \dots)^3 = 8\kappa^3 - 36\kappa^2\lambda + \dots - \dots$

(9) Αν $x + y = 5$ και $xy = 6$, να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $x^2 + y^2$, β) $x^3 + y^3$

(10) Αν είναι $x + \frac{1}{x} = 6$, να βρεθεί η τιμή των παραστάσεων:

α) $x^2 + \frac{1}{x^2}$, β) $x^3 + \frac{1}{x^3}$

Απάντηση: α) 34, β) 198

(11) Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης $x^2 + \frac{1}{x^2}$

όταν : α) $x + \frac{1}{x} = 2$, β) $x - \frac{1}{x} = -3$

Απάντηση: α) 2, β) 11

(12) Να γίνουν γινόμενα οι παραστάσεις :

i. $15a^3\beta^2\gamma - 5a^2\beta^3\gamma^2 - 20a^4\beta^4\gamma^3x$

ii. $12x^2y + 6xy^2 - 3xy$

iii. $(2x + y) - a(2x + y) - (2x + y)^2$

iv. $(4a - 2\beta) \cdot (2x - 3y) + (3y - 2x) \cdot (\beta - 2a)$

(13) Να γίνουν γινόμενα οι παραστάσεις:

i. $ax - \beta y + \beta x - ay$

ii. $x^3 - 3x^2 - 4x + 12$

iii. $4a + a\beta - 20\beta - 5\beta^2$

iv. $8x^3 - 2x^2 - 4x + 1$

v. $a(x - 1) + a^2 - x$

vi. $(a - \beta)^2 - a + \beta$

(14) Να γίνουν γινόμενα οι παραστάσεις:

i. $25x^2 + 40xy + 16y^2$

ii. $16x^2 - 56xy + 49y^2$



iii. $x^2y^2 - 10xy + 25$

iv. $9a^2 - 6a\beta + \beta^2$

(15) Να γίνουν γινόμενα οι παραστάσεις:

i. $a^4 - 1$

ii. $a^2 - 16\beta^2\gamma^2$

iii. $a^3\beta + 2a^2\beta^2 + a\beta^3$

iv. $4x^3 - 8x^2 + 4x$

v. $a^4 + 8a$

vi. $x^4 - 2x^2 + 1$

(16) Να γίνουν γινόμενα οι παραστάσεις:

i. $x^3 + 125y^3$

ii. $x^2y^2 - 16a^2$

iii. $27a^3 - 8\beta^3$

iv. $(3x-1)^2 - (x-1)^2$

v. $100a^2 - 4(a-1)^2$

vi. $4x^2 - 4x + 1$

(17) Να γίνουν γινόμενα τα παρακάτω τριώνυμα:

i. $x^2 - 3x + 2$

ii. $x^2 + 10x + 24$

iii. $x^2 + 3x - 4$

iv. $x^2 - 5x - 14$

(18) Να γίνουν γινόμενα οι παραστάσεις:

i. $x^2 - a^2 + 2a\beta - \beta^2$

ii. $x^2 - 6ax + 9a^2 - 25\psi^2$

iii. $a^2 - 2a\beta + \beta^2 - a + \beta$

iv. $a^2 - \beta^2 + 4\beta - 4$

v. $x^2 + 4xy + 4y^2 - 9$

vi. $x^2 + 6x + 9 - y^2 + 2y - 1$

(19) Να γίνουν γινόμενα οι παραστάσεις:

i. $(a + \beta)^2 - (a - \beta)^2$

ii. $25a^2x^4 - 4\beta^2$

iii. $(4x + 2y)^2 - (2x - 3y)^2$

iv. $3a^3\beta - 27a\beta^3$

v. $(a^2 + 1)^2 - 4a^2$

vi. $5x^5 - 20xy^3$

(20) Να γίνουν γινόμενα οι παραστάσεις:

i. $(x - y) - (a + \beta)^2 \cdot (x - y)$

ii. $x^2y^2 - 9y^2 - x^2 + 9$

iii. $a^2 + 2a\beta + \beta^2 - x^2 + 4x - 4$

iv. $y^2 + 2x - x^2 - 1$

v. $4(x + 2y)^2 - 9(3x - y)^2$

(21) Να γίνουν γινόμενα οι παραστάσεις:

i. $(3x - 6) \cdot (x^2 - 1) - (5x - 10) \cdot (x - 1)^2$

ii. $5(4 - x^2) - (x - 2)^2$

iii. $(a^2 - 9) - (a + 3)^2$



• Βασικές μέθοδοι παραγοντοποίησης

✓ A. Κοινός Παράγοντας

π.χ.

i. $x^3y - y^2x = xy(x^2 - y)$

mondobimbo.altervista.org

ii. $2x(a - \beta) - (a - \beta) = (a - \beta)(2x - 1)$

✓ B. Ομαδοποίηση (κοινός παράγοντας κατά ομάδες)

π.χ.

i. $x^3 - 2x^2 + x - 2 = (x^3 - 2x^2) + (x - 2) = x^2(x - 2) + 1 \cdot (x - 2) =$

ii. $(x - 1)^2 - x + 1 = (x - 1)^2 + (-x + 1) = (x - 1)^2 - (x - 1) =$
 $= (x - 1) \cdot [(x - 1) - 1] = (x - 1) \cdot (x - 2)$

✓ Γ. Ταυτότητες

i. • $a^2 - \beta^2 = (a + \beta)(a - \beta)$

π.χ.

$$4x^2 - 1 = (2x)^2 - 1^2 = (2x - 1) \cdot (2x + 1)$$

ii. • $(a + \beta)^2 = a^2 + 2a\beta + \beta^2$ • $(a - \beta)^2 = a^2 - 2a\beta + \beta^2$

π.χ.

$$a^2 - 4a + 4 = a^2 - 2 \cdot 2 \cdot a + 2^2 = (a - 2)^2$$

$$25x^2 - 30x\psi + 9\psi^2 = (5x)^2 - 2 \cdot 5x \cdot 3\psi + (3\psi)^2 = (5x - 3\psi)^2$$

iii. • $a^3 + \beta^3 = (a + \beta) \cdot (a^2 - a\beta + \beta^2)$ • $a^3 - \beta^3 = (a - \beta) \cdot (a^2 + a\beta + \beta^2)$

π.χ.

$$8x^3 + 1 = (2x)^3 + 1^3 = (2x + 1) \cdot [(2x)^2 - 2x \cdot 1 + 1^2] =$$

$$= (2x + 1) \cdot (4x^2 - 2x + 1)$$

$$a^3 - 27 = a^3 - 3^3 = (a - 3) \cdot (a^2 + 3a + 3^2) = (a - 3) \cdot (a^2 + 3a + 9)$$

iv. • $a^3 + 3a^2\beta + 3a\beta^2 + \beta^3 = (a + \beta)^3$

• $a^3 - 3a^2\beta + 3a\beta^2 - \beta^3 = (a - \beta)^3$

π.χ.

$$8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 = (2x)^3 - 3 \cdot (2x)^2 \cdot 1 + 3 \cdot 2x \cdot 1^2 - 1^3 = (2x - 1)^3$$

✓ Δ. Παραγοντοποίηση τριωνύμου.

π.χ.

α)

$$x^2 + 3x + 2 = x^2 + (2 + 1)x + 2 = x^2 + 2x + x + 2 =$$

$$= (x^2 + 2x) + (x + 2) = x(x + 2) + 1 \cdot (x + 2) = (x + 2) \cdot (x + 1)$$

Δηλ βρίσκουμε δύο αριθμούς που έχουν γινόμενο 2 και άθροισμα 3
Οι αριθμοί είναι το 1 και το 2.

$$\text{Άρα } x^2 + 3x + 2 = (x + 2) \cdot (x + 1)$$



β)

$$\begin{aligned}x^2 - x - 6 &= x^2 + (-3 + 2)x - 6 = x^2 - 3x + 2x - 6 = \\&= (x^2 - 3x) + (2x - 6) = x(x - 3) + 2(x - 3) = (x - 3) \cdot (x + 2) = \\&= x(x - 3) + 2(x - 3) = (x - 3) \cdot (x + 2)\end{aligned}$$

Δηλ βρίσκουμε δύο αριθμούς που έχουν γινόμενο -6 και άθροισμα -1.
Οι αριθμοί είναι το -3 και το 2.

Άρα $x^2 - x - 6 = (x - 3) \cdot (x + 2)$

✓ Ε. Συνδυασμός των προηγούμενων περιπτώσεων

π.χ.

$$\begin{aligned}4 - x^2 - y^2 + 2xy &= 4 + (-x^2 - y^2 + 2xy) = 4 - (x^2 + y^2 - 2xy) = \\&= 2^2 - (x - y)^2 = [2 - (x - y)] \cdot [2 + (x - y)] = (2 - x + y) \cdot (2 + x - y)\end{aligned}$$

✓ ΣΤ. Διάσπαση όρων

π.χ.

α)

$$\begin{aligned}a^2 + a\beta - 2\beta^2 &= a^2 + a\beta - \beta^2 - \beta^2 = (a^2 - \beta^2) + (a\beta - \beta^2) = \\&= (a - \beta) \cdot (a + \beta) + \beta(a - \beta) = (a - \beta) \cdot [(a + \beta) + \beta] = (a - \beta) \cdot (a + 2\beta)\end{aligned}$$

β)

$$\begin{aligned}x^3 - 7x + 6 &= x^3 - 6x - 1x + 6 = \\&= (x^3 - x) + (-6x + 6) = x(x^2 - 1) - 6(x - 1) = \\&= x(x - 1) \cdot (x + 1) - 6(x - 1) = \\&= (x - 1) \cdot [x(x + 1) - 6] = (x - 1) \cdot (x^2 + x - 6) = (x - 1) \cdot (x + 3) \cdot (x - 2)\end{aligned}$$

$3 \cdot (-2) = -6$
 $3 + (-2) = 1$