ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΟΥΣ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ

1. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί κ ,λ για τους οποίους οι μιγαδικοί
$z = 4κ + 3λ + 7κi$ και **$w = 7 - (λ - 2)i$** να είναι ίσοι.

2. Να βρεθούν οι κ, $λ \in R$ ώστε ο $z = (8κ^2 + 2κ \cdot i) + 4λ + (2 - 3 \cdot i)$ να είναι ίσος με το μηδέν.

3. Να βρείτε για ποιες τιμές του $λ \in R$ ο μιγαδικός $z = 6 + 2λ^2 i - 3(λ + 6i)$ είναι
α) πραγματικός β) φανταστικός

4. Να βρεθεί ο μιγαδικός z που ικανοποιεί την σχέση $\frac{z}{z_1} + z_2 = (z_1 - z_2)^2$

όπου $z_1 = 3 - i$, $z_2 = 2 + i$.

5. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί x,ψ ώστε να ισχύουν οι ισότητες
α) $(x+i)^2 + \frac{1}{i} = (i-x)^2 + ψ + 1$ β) $\frac{x-ψi}{1+i} + \frac{1}{i} = \frac{x}{2} + \frac{1}{1-i}$

6. Να βρεθούν οι $x, ψ \in R$ ώστε να ισχύει α) $x + ψ \cdot i = (1 + i)^8$ και
β) $x + ψ \cdot i = (1 - i)^{16}$.

7. Δείξτε ότι $\frac{(1+i)^ν}{(1-i)^{ν-2}} = 2 \cdot i^{ν-1}$.

8. Εάν ο $z = \frac{(3+i)^2}{-1+i}$ να βρεθεί το Re(w) και το Im(w) όπου $w = \frac{1+\bar{z}}{z}$.

9. Εάν $z = x + ψi$ με $x,ψ \in R$ να λυθεί η εξίσωση : $z^2 + \bar{z} = 0$

10. Να λυθεί στο *C* η εξίσωση : $5(z - \bar{z}) + z\bar{z} = 61 + 50i$

11. Να βρεθούν οι μιγαδικοί z για τους οποίους ισχύει ότι
α) $w = \frac{z+i}{z-i} \in R$ και β) $w = \frac{z+i}{z-i} \in I$

12. Εάν ο z είναι μιγαδικός με $z \neq 1$ να βρεθούν οι σχέσεις ώστε ο $w = \frac{z-2}{z-1}$ να είναι α) πραγματικός β) φανταστικός

13. Έστω ότι ο z είναι μιγαδικός με $z \neq -1$ και $w = \dfrac{z}{z+1}$ δείξτε ότι αν $w \in R \Leftrightarrow z \in R$

14. Δείξτε ότι ,αν για τον μιγαδικό z ισχύει $z \cdot \bar{z} = 1$,τότε δείξτε ότι ο αριθμός $z + \dfrac{1}{z} \in R$ ενώ ο $z - \dfrac{1}{z} \in I$.

15. Δείξτε ότι : $\overline{\left(\dfrac{1+z}{z}\right)} - \overline{\left(z + \dfrac{1}{z}\right)} = 1 - \bar{z}$

16. Να λύσετε το (Σ) $\begin{cases} zi - 2w = -4 + 3i \\ 2\bar{w} + \bar{z} = 3 \end{cases}$

17. Να λυθεί το (Σ) $\begin{cases} (1-i)z + iw = 2 - i \\ (2-i)z + (2+i)w = 7 + 4i \end{cases}$

18. Αν $z \in C$ να αποδείξετε ότι:

i) $z \in R \Leftrightarrow z = \bar{z}$

ii) ο αριθμός $w = \dfrac{z^5 + \overline{z^5}}{1 + z\bar{z}}$ είναι πραγματικός .

19. Θεωρούμε το $f(x) = x^2 + \alpha x + \beta$. Να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in R$ ώστε ο μιγαδικός $z = 4 - i$ να είναι ρίζα του f(x).

20. Αν $z \in C$ να αποδείξετε ότι

i) $z \in I \Leftrightarrow \bar{z} = -z$

ii) Έστω $\lambda \in R^*$ και $z \neq \lambda i$. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $w = \dfrac{\lambda - iz}{z - \lambda i}$ είναι φανταστικός αν και μόνον αν ο z είναι φανταστικός.

21. Αν $z = 3 - 4i$ και $w = -1 - i\sqrt{3}$,να βρείτε το μέτρο των z^3 , w^{-3} , $\dfrac{z^2}{w^3}$, $i\left(\bar{w}\right)^5$.

22. Να βρείτε τα μέτρα των μιγαδικών: $\dfrac{10 + 6i}{3 - 5i}$, $\dfrac{(1-2i)^7}{(2+i)^3(3-4i)}$, $\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{\nu} \cdot (-5 + 12i)$, $\dfrac{(1+2i)^{\nu+2}}{(2-i)^{\nu-1}}$

23. Να δείξετε ότι

α) $\left|z_1+z_2\right|^2=\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2+2\operatorname{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right)=\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2+2\operatorname{Re}\left(z_2\overline{z_1}\right)$

β) $\left|z_1-z_2\right|^2=\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2-2\operatorname{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right)=\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2-2\operatorname{Re}\left(z_2\overline{z_1}\right)$

24. 38. Δείξτε ότι

α) $\left|z_1+z_2\right|^2+\left|z_1-z_2\right|^2=2\left(\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2\right)$

β) $\left|z_1+z_2\right|^2-\left|z_1-z_2\right|^2=4\cdot\operatorname{Re}(z_1\,\overline{z}_2)$.

25. Δείξτε ότι $\left|z+|z|\right|+\left|z-|z|\right|=2|z| \iff z\in R$

26. Δείξτε ότι αν $|z+i|=|z-i| \iff z\in R$

27. Εάν $w=\dfrac{z-1}{z+1}$ για κάθε $z\in C-\{-1\}$ δείξτε ότι αν $w\in I$ τότε $|z|=1$

28. Εάν $z_1, z_2, z_3\in C-\{0\}$ με $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$,τότε δείξτε ότι αν:

$z_1+z_2+z_3=1 \iff \dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}+\dfrac{1}{z_3}=1$

29. Εάν $|z_1|=|z_2|=1$ με $z_1, z_2\in C$ δείξτε : $|z_1-z_2|=\left|1-z_2\overline{z}_1\right|$

30. Δείξτε ότι $\left|1+z_1\overline{z}_2\right|^2+\left|z_1-z_2\right|^2=\left(1+\left|z_1\right|^2\right)\left(1+\left|z_2\right|^2\right)$

31. Εάν $z\in C-\{-1\}$ και $w=\dfrac{z^{\nu}-1}{z^{\nu}+1}$ με $\nu>1$.

Εάν ο w είναι φανταστικός τότε $|z|=1$.

32. Εάν z = α + βi με α, β$\in$R και $z^2+z+1=0$ δείξτε ότι : $|z|=|z+1|=1$

33. Εάν για τους μιγαδικούς z_1 , z_2 , z_3 ισχύουν ότι $z_1+z_2+z_3=0$ (1)
$z_1^2+z_2^2+z_3^2=0$ (2) τότε $|z_1|=|z_2|=|z_3|$

34. Εάν για τον μιγαδικό z ισχύει

α) $|z-10|=3|z-2| \iff |z-1|=3$ β) $\left|\dfrac{z-9}{z-1}\right|=3 \iff z\cdot\overline{z}=9$

35. Εάν $z_1, z_2 \in C$ και $|z_1 + z_2| = |z_1| = |z_2|$ δείξτε ότι : $|z_1 - z_2| = \sqrt{3}|z_1|$

36. Έστω $z \in C^*$. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $w = z + \frac{1}{z} \in R \Leftrightarrow z \in R$ ή $|z| = 1$

37. Έστω $z \neq -1$. Να αποδείξετε ότι αν $|z| = 1$ τότε ο $w = \frac{z-1}{z+1}$ είναι φανταστικός και αντίστροφα.

38. Να δείξετε ότι η εξίσωση $(1+iz)^v = \frac{2+3i}{2\sqrt{3}-i}$ δεν έχει πραγματική ρίζα.

39. Αν ισχύει $\left|\frac{z-w}{1-w\bar{z}}\right| = 1$ τότε δείξτε ότι ένας τουλάχιστον από τους z,w έχει μέτρο ίσο με 1.

40. Αν $z = 9-12i$ και $|w| = 4$ να δείξετε ότι $11 \leq |w+z| \leq 19$

41. Έστω ο $w = \left(\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}\right)^2$ με $z_1, z_2 \in C - \{0\}$

α) Αν $|z_1| = |z_2|$ να δείξετε ότι $w \in R$.

β) Αν $|w| = 1$ να δείξετε ότι ο $\frac{z_1}{z_2} \in I$ και ότι ο $z_1\bar{z}_2 \in I$.

42. Αν για τον μιγαδικό z ισχύει $(1+iz)^{1821} = (i+z)^{1819}$ τότε $Im(z) \neq 0$

43. Αν για τον μιγαδικό z = x + ψi ισχύει $(1 - z)^v = z^v$ τότε δείξτε ότι $Re(z) = \frac{1}{2}$.

44. Αν $f(z) = \frac{1+z^v}{(1+z)^v}$, $z \neq -1$, να αποδείξετε ότι

i) $f(z) = f(\frac{1}{z})$ με $z \neq 0$ ii) αν $|z| = 1$ και $z \neq -1$ τότε $f(z) \in R$

45. Δίνεται ο z = x + ψi με x,ψ πραγματικούς. Να βρεθούν τα σημεία Μ(z) του επιπέδου για τα οποία $|z^2| + 6Re(z) + 7 = 0$.

46. Να βρεθεί ο γτ των εικόνων Μ(z) για τους οποίους ο $w = \dfrac{z+5i}{z+1}$ είναι

α) πραγματικός β) φανταστικός

47. Να βρεθεί ο γτ των σημείων Μ(z) του επιπέδου για τα οποία ισχύει : $|z+2| = |z-3+i|$.

48. Να βρεθούν τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου για τα οποία ισχύει $|z-1|^2 + |z+1|^2 = 4$.

49. Να βρεθεί ο γ.τ. των εικόνων των $M(z)$ για τα οποία ισχύει : $\left|\dfrac{z}{z-3}\right| = \dfrac{1}{2}$ με $z \neq 3$.

50. Από τους μιγαδικούς z για τους οποίους ισχύει $|z-4i| = 2$ ποιος έχει το ελάχιστο και ποιος το μέγιστο μέτρο;

51. Αν $z \in C$ με $|z| = 1$ να βρείτε την μέγιστη τιμή της παράστασης $f(z) = |z+8-6i|$. Για ποια τιμή του z συμβαίνει;

52. Θεωρούμε τους μιγαδικούς z_1, z_2, $z_3 \neq 0$ με $z_1 = (1+i) \cdot z_3$ και $z_2 = \dfrac{2-\sqrt{3}+i}{2} z_3$.
Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές $A(z_1)$, $B(z_2)$, $\Gamma(z_3)$ είναι ισόπλευρο.

53. Αν $z \in C$ και $|z+6-3i| \leq 7$ να βρείτε την ελάχιστη και την μέγιστη τιμή της $A = |z-2+3i|$.

54. Θεωρούμε τους μιγαδικούς $z = \lambda - 5 + (15 - 2\lambda)i$, $\lambda \in R$. Να βρείτε τον γ.τ. των εικόνων του z όταν το $\lambda \in R$. Να βρεθεί ποιος από τους z έχει την πλησιέστερη εικόνα από το O(0,0).

55. Αν z_1, z_2, $z_3 \in C$ και $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, να αποδείξετε ότι : $|z_1 \cdot z_2 + z_2 \cdot z_3 + z_3 \cdot z_1| = |z_1 + z_2 + z_3|$.

56. Αν z_1, $z_2 \in C$ και $\dfrac{z_1}{z_2} > 0$, να αποδείξετε ότι :

α) $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$. β) $|z_1 - z_2| = \big||z_1| - |z_2|\big|$.

57. Αν $z \in C$ και $|z-3| = 2|z+3|$, να αποδείξετε ότι : $|z+5| = 4$.

58. Να αποδείξετε ότι : για κάθε $z \in C$ ισχύει $|z+1| + |z+2| \leq |z| + |z+3|$.

59. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z , αν ικανοποιούν την σχέση : $|\mathrm{Re}(z)-2| = |z+2|$.

60. Να αποδείξετε ότι : αν $w = \dfrac{z_1 - \bar{z}_1 \cdot z_2}{1-z_2} \in R \Leftrightarrow z_1 \in R$ ή $|z_2| = 1$.

61. Να αποδείξετε ότι : $z^2 = (\bar{z})^2 \Leftrightarrow z \in R$ ή $z \in I$.

62. Αν $|z|^2 = |z^2 - 1|$, να αποδείξετε ότι : $\mathrm{Re}(z^2) = \dfrac{1}{2}$.

63. Αν $z , w \in C$ και $z^2 + w^2 = 0$ τότε :

α) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών w , αν $|z| = 1$.

β) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών w , αν $|z-1+2i| = 1$.

64. Αν $z \in C$ και $|z-i| \leq 1$ και $|z-2i| = 1$, να αποδείξετε ότι : $1 \leq |z| \leq \sqrt{3}$.

65. α) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z , – z , i z $\sqrt{3}$ με $z \neq 0$, είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου.

β) Αν το εμβαδόν του ισοπλεύρου τριγώνου είναι $\sqrt{3}$, να υπολογίσετε το $|z|$.

66. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z , αν ικανοποιούν την σχέση : $|z|^2 = 2 \cdot \mathrm{Re}(3z - 4iz) - 16$.

67. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z , αν ικανοποιούν την σχέση : $\left|\dfrac{4z}{2+i}\right| + \sqrt{5} = |\bar{z} \cdot \sqrt{5}|$.

68. Αν $z = (\lambda - 1) + (\lambda + 2) \cdot i$ όπου $\lambda \in R$, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z και να βρεθεί ποιος από αυτούς έχει το ελάχιστο μέτρο.

69. Αν $z \in C$ και $|z-3| + |z+3| = 10$,

α) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z.

β) Να βρείτε τους φανταστικούς αριθμούς που οι εικόνες τους ανήκουν στον παραπάνω γ.τ.

70. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών w ,

αν $|z| = \frac{1}{2}$ και $w = z - \frac{1}{z}$.

71. Αν $z \in C$ και $|z - 1 + 2i| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

α) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών $w = 2z + 1 + i$.

β) Ποιος από τους w έχει το ελάχιστο και ποιος το μέγιστο μέτρο;

72. Αν z_1 , z_2 ,$z_3 \in C$ που ικανοποιούν την σχέση : $z_2 - z_3 = 2i \cdot (z_1 - z_3)$ και $A(z_1)$, $B(z_2)$, $\Gamma(z_3)$ οι εικόνες τους στο μιγαδικό επίπεδο.

α) Εξετάστε αν τα σημεία Α ,Β ,Γ σχηματίζουν τρίγωνο.

β) Δείξτε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο

γ) Να δείξετε ότι $|z_2 - z_3| = 2 \cdot |z_1 - z_3|$ και $|z_2 - z_1| = \sqrt{5} \cdot |z_1 - z_3|$

73. Δίνονται οι μιγαδικοί z_1,z_2 που οι εικόνες τους στο μιγαδικό επίπεδο ανήκουν στον ίδιο κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων.

Αποδείξτε ότι ο $w = \left(\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}\right)^2$ είναι πραγματικός αριθμός.

74. Αν z_1, z_2, z_3 ϵC ισχύει $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ και $z_1 + z_2 + z_3 = 4i$ να υπολογισθεί το μέτρο του μιγαδικού $w = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}$

75. Αν για τους z_1, z_2, z_3 ϵC ισχύει $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ και έστω οι μιγαδικοί $z = z_1 + z_2 + z_3$ και $w = z_1z_2 + z_3z_1 + z_2z_3$. Να αποδείξετε ότι $|z| = |w|$.

76. Αν για τους z_1, z_2 ισχύει $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$, τότε να δείξετε ότι $\frac{z_1}{z_2} \geq 0$

77. Αν για τους z_1, z_2, z_3 ϵC ισχύουν $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ και

$z_1\overline{z_1} = z_2\overline{z_2} = z_3\overline{z_3} = 1$, να δειχθεί ότι : $z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + 1 = 0.$

78. Αν για τους μιγαδικούς z , w ισχύουν $|z| = |w| = 1$ και $z_1 = z + w + \alpha zw + 1$,

$z_2 = z + w + zw + \alpha$, όπου $\alpha \in R$.

Να δείξετε ότι :

i) $z_1 = zw\overline{z_2}$

ii) το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές όπου Α η εικόνα του z_1, Β η εικόνα του z_2 και Ο η αρχή των αξόνων.

79. i) Να λύσετε την εξίσωση $2z^2 + 2z + 1 = 0$ (1) .

ii) Ονομάζουμε z_1 τη ρίζα της (1) της οποίας $Im(z_1) > 0$.

Να υπολογίσετε τα z_1^2, z_1^3 .

iii) Αν Α, Β, Γ οι εικόνες των μιγαδικών z_1 , z_1^2, z_1^3 αντίστοιχα στο μιγαδικό επίπεδο , δείξτε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

iv) Να υπολογίσετε το $E_{ΑΒΓ}$.

80. Δίνεται ο μιγαδικός w , για τον οποίο ισχύει $w = \left(|w| - 1\right) + |w|i$.

i) Να βρεθεί το $|w|$.

ii) Να βρεθεί ο μιγαδικός w.

81. Έστω ότι για το μιγαδικό z ισχύει : $|z - 3| + |z + 3| = 10$.

α. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο C των εικόνων του z .

β. Ποιος z έχει το ελάχιστο και ποιος το μέγιστο μέτρο ;

γ. Αν $z = \chi + \psi i$ και $M(z) \in C$, να δείξετε ότι $|4z + \psi i| = 20$

82. Αν $z, w \in C$ με $z^2 + w^2 = 0$ να δείξετε ότι : $z^{2010} + w^{2010} = 0$