ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 10 ΙΟΥΝΙΟΥ 2013 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα Α και A' ισχύει:

$$P(A') = 1 - P(A)$$

Μονάδες 7

Α2. Να ορίσετε το μέτρο διασποράς **εύρος** ή **κύμανση**.

Μονάδες 4

Α3. Τι ονομάζεται παράγωγος μιας συνάρτησης f στο σημείο x_o του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) $\lim\limits_{x \to x_o} (\sigma\upsilon\nu x) = \sigma\upsilon\nu x_o$

(μονάδες 2)

β) $\left(c\, f(x)\right)' = c\, f'(x)$

(μονάδες 2)

γ) Σε μια ποσοτική μεταβλητή αντί του ραβδογράμματος χρησιμοποιείται το **διάγραμμα συχνοτήτων**.

(μονάδες 2)

δ) Ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής Χ χαρακτηρίζεται ομοιογενές, όταν ο συντελεστής μεταβολής ξεπερνά το 10%

(μονάδες 2)

ε) Δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω λέγονται ασυμβίβαστα, όταν $A \cap B \neq \varnothing$

(μονάδες 2)

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2e^x(2x-3), \quad x \in \mathbb{R}$

Θεωρούμε επίσης δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω με

$$P(A) = x_1 \quad \text{και} \quad P(B) = -\frac{f(x_1)}{6\sqrt{e}}$$

όπου η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_1

Β1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 6

Β2. Να αποδείξετε ότι $P(A) = \frac{1}{2}$ και $P(B) = \frac{2}{3}$

Μονάδες 6

Β3. Να αποδείξετε ότι τα ενδεχόμενα Α και Β δεν είναι ασυμβίβαστα

Μονάδες 5

και

Β4. Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{6} \leq P(A' - B') \leq \frac{2}{3}$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Εξετάζουμε ένα δείγμα μεγέθους ν ως προς μία ποσοτική μεταβλητή Χ και ομαδοποιούμε τις παρατηρήσεις του δείγματος σε 5 ισοπλατείς κλάσεις πλάτους c, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Κλάσεις	**Κεντρικές τιμές x_i**	**$f_i\%$**	**F_i**	**$F_i\%$**
[α, ·)				λ
[· , ·)				3λ + 10
[· , ·)				
[· , ·)				$\kappa\lambda^2 - 2\lambda + 10$
[· , ·)				$\kappa\lambda^2 - 3\lambda + 30$
Σύνολα				

Δίνεται ότι οι αθροιστικές σχετικές συχνότητες F_3 και F_5 είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$5x^2 - 8x + 3\kappa = 0 \text{ , όπου } x \in \mathbb{R} \text{ και } \kappa \in \mathbb{R}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι κ = 1 και λ = 10

Μονάδες 8

Γ2. Να αποδείξετε ότι $f_1\% = 10$, $f_2\% = 30$, $f_3\% = 20$, $f_4\% = 30$ και $f_5\% = 10$

Μονάδες 5

Γ3. Αν το 25% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες του 16 και το 25% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 24, τότε να αποδείξετε ότι α = 10 και c = 4

(μονάδες 4)

Στη συνέχεια να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα κατάλληλα συμπληρωμένο.

(μονάδες 4)

Μονάδες 8

Γ4. Αν το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 22 είναι 800, τότε να υπολογίσετε το μέγεθος του δείγματος.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1} + 1$, $x \in \mathbb{R}$ και ο δειγματικός χώρος

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, όπου $\omega_1 = -1$, $\omega_2 = 0$ και $1 < \omega_3 < \omega_4$

Δίνονται, επίσης, οι πιθανότητες $P(\omega_i) = f(\omega_i) - \dfrac{1}{3}$, όπου $i = 1, 2$

και
$$P(\omega_3) = -\frac{1}{6}\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{x-1}$$

Δ1. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα Α, Β και Γ του δειγματικού χώρου Ω με

$$A = \{\omega \in \Omega \ / \ f'(\omega) \le 0\}, \qquad B = \{\omega \in \Omega \ / \ f(\omega) > 1\}$$

και

$$\Gamma = \left\{\omega \in \Omega \ / \ x^2 + \omega x \ge -\frac{1}{4} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}\right\}$$

α) Να βρείτε τις πιθανότητες $P(\omega_1)$, $P(\omega_2)$, $P(\omega_3)$ και $P(\omega_4)$

(μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις πιθανότητες P(A), P(B), P(Γ) και P(A-B)

(μονάδες 8)
Μονάδες 16

Δ2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f, η οποία σχηματίζει με τον άξονα x′x γωνία 45^o

Μονάδες 4

Δ3. Αν $M_κ(ω_κ,\ y_κ)$, $κ = 1, 2, 3, 4$ είναι σημεία της εφαπτομένης (ε): $y = x + 1$ με

$$2δ_{ω_κ} = δ_{y_κ} \text{ και } R_{y_κ} = 5$$

τότε να υπολογίσετε τα $ω_3$ και $ω_4$ του δειγματικού χώρου Ω, όπου

$δ_{ω_κ}$: η διάμεσος των τετμημένων των σημείων $M_κ$,

$δ_{y_κ}$: η διάμεσος των τεταγμένων των σημείων $M_κ$ και

$R_{y_κ}$: το εύρος των τεταγμένων των σημείων $M_κ$

Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και **να μην γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και ΜΟΝΟ για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 18:15

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

Λύσεις θεμάτων επαναληπτικών πανελληνίων εξετάσεων

Στο μάθημα: « Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής»

Γ΄Λυκείου Γενικής Παιδείας

Δευτέρα, 10 Ιουνίου 2013

Θέμα Α

Α1. Θεωρία, σελ. 150 Σχολικό Βιβλίο (απόδειξη)

Α2. Θεωρία, σελ.92 Σχολικό Βιβλίο (Ορισμός)

Α3. Θεωρία, σελ. 22 Σχολικό Βιβλίο (Ορισμός)

Α4. α) Σ β) Σ γ) Σ δ) Λ ε) Λ

Θέμα Β

Β1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R (ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με

$f'(x) = 2e^{x}(2x-1)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Για x<$\frac{1}{2}$ έχουμε $f'(x) < 0$ και άρα η f είναι γν. φθίνουσα στο (-∞,$\frac{1}{2}$]

Για x>$\frac{1}{2}$ έχουμε $f'(x) > 0$ και άρα η f είναι γν. αύξουσα [$\frac{1}{2}$,∞)

Η f έχει Τ. ελάχιστο στο $x_1 = \frac{1}{2}$ το $f(\frac{1}{2}) = -4\sqrt{e}$

Β2.Ως συνέπεια του προηγούμενου ερωτήματος έχουμε ότι :

$P(A) = x_1 = \frac{1}{2}$

$P(B) = -\frac{f(x_1)}{6\sqrt{e}} = -\frac{-4\sqrt{e}}{6\sqrt{e}} = \frac{2}{3}$

B3. Έστω ότι τα ενδεχόμενα Α και Β είναι ασυμβίβαστα τότε θα είναι

$A \bigcap B = \varnothing$
$P(A \bigcap B) = 0$

Τώρα θα έχουμε από τον προσθετικό νόμο των πιθανοτήτων :
$P(A \bigcup B) = P(A) + P(B) - P(A \bigcap B) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6} > 1$ που είναι **άτοπο**, άρα τα Α και Β δεν είναι ασυμβίβαστα.

B4. Προφανώς έχουμε

$A' - B' = A' \bigcap B \subseteq B$
$P(A' - B') \leq P(B) = \frac{2}{3}$

Θα αποδείξουμε και ότι $P(A' - B') \geq \frac{1}{6}$. Έχουμε:

$P(A' - B') = P(A' \bigcap B) = P(A') + P(B) - P(A' \bigcup \mathrm{B}) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - P(A' \bigcup \mathrm{B}) = \frac{7}{6} - P(A' \bigcup \mathrm{B})$

Άρα έχουμε ισοδύναμα : $P(A' - B') \geq \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{7}{6} - P(A' \bigcup \mathrm{B}) \geq \frac{1}{6} \Leftrightarrow P(A' \bigcup \mathrm{B}) \leq 1$ που είναι αληθές

Θέμα Γ

Γ1. Αφού οι F_3 , F_5 είναι ρίζες της εξίσωσης $5x^2 - 8x + 3\kappa = 0$ θα ισχύουν οι τύποι του Vietta: Άρα (και αφού $\mathrm{F}_5 = 1$) θα έχουμε:

$$F_3 + \mathrm{F}_5 = \frac{8}{5} \Leftrightarrow F_3 + 1 = \frac{8}{5} \Leftrightarrow F_3 = \frac{3}{5} = 0,6$$
$$F_3 \cdot \mathrm{F}_5 = \frac{3\kappa}{5} \Leftrightarrow 0,6 = \frac{3\kappa}{5} \Leftrightarrow \kappa = 1$$

$F_5\% = \kappa\lambda^2 - 3\lambda + 30 = 100 \Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 70 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 10, \lambda = -7(\textit{απορρίπτεται}$ αφού $\mathrm{F}_1\% = \lambda > 0)$

Γ2. Για τις σχετικές συχνότητες % έχουμε:

$f_1\% = \lambda = 10\%$
$f_2\% = F_2\% - f_1\% = 2\lambda + 10 = 30\%$
$f_3\% = F_3\% - f_2\% = 60 - (3\lambda + 10) = 50 - 3\lambda = 20\%$
$f_4\% = F_4\% - 60\% = \kappa\lambda^2 - 2\lambda - 50 = 30\%$
$f_5\% = F_5\% - F_4\% = -\lambda + 20 = 10\%$

Γ3. Αφού το 25% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες του 16 θα είναι όσες παρατηρήσεις ανήκουν στην πρώτη κλάση (10%) και το μισό της $2^{ης}$ κλάσης (δηλαδή το άλλο 15%).Άρα θα είναι όλες οι παρατηρήσεις χι με: $x_i > \frac{2a+3c}{2} = 16 \Leftrightarrow 2a+3c = 32(I)$

Ακόμα, αφού το 25% των παρατηρήσεων είναιμεγαλύτερες ή ίσες από το 24 θα είναι οι μισές παρατηρήσεις της $4^{ης}$ κλάσης και όλες οι παρατηρήσεις της $5^{ης}$ κλάσης, άρα θα είναι όλες οι παρατηρήσεις χj με $x_j \geq \frac{2a+7c}{2} = 24 \Leftrightarrow 2a+7c = 48(II)$. Από το σύστημα των σχέσεων (Ι) και (ΙΙ) προκύπτει ότι α=10 και c=4.

Ο πίνακας συμπληρωμένος είναι:

Κλάσεις	**Κεντρικές τιμές χι**	**fi%**	**Fi**	**Fi%**
[10,14)	12	10	0,1	10
[14,18)	16	30	0,4	40
[18,22)	20	20	0,6	60
[22,26)	24	30	0,9	90
[26,30)	28	10	1	100
ΣΥΝΟΛΑ		100		

Γ4. Οι παρατηρήσεις που είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 22 είναι όσες ανήκουν στην $4^η$ και $5^η$ κλάση και άρα οι σχετικές συχνότητες τους είναι:

$f_4 + f_5 = 0,4$

$$\frac{v_4}{v} + \frac{v_5}{v} = 0,4 \Leftrightarrow \frac{v_4 + v_5}{v} = 0,4 \Leftrightarrow \frac{800}{v} = 0,4 \Leftrightarrow v = 2000$$

Όπου ν το μέγεθος του δείγματος.

Θέμα Δ

Δ1. α) Έχουμε τις πιθανότητες των ω_1 και ω_2

$$P(\omega_1) = f(\omega_1) - \frac{1}{3} = f(-1) - \frac{1}{3} = \frac{1}{6};$$

$$P(\omega_2) = f(\omega_2) - \frac{1}{3} = f(0) - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Για την πιθανότητα του ω_3 θα έχουμε: Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με $f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}, x \in \mathbb{R}$ και άρα έχουμε:

$$P(\omega_3) = -\frac{1}{6}\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{x-1} = \frac{1}{6}\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{(1+x^2)^2(x-1)} = \frac{1}{6}\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{12}$$

Για την πιθανότητα του ω_3 θα έχουμε:

$$P(\Omega)=1 \Leftrightarrow P(\omega_1)+P(\omega_2)+P(\omega_3)+P(\omega_4)=1 \Leftrightarrow P(\omega_4)=1-\frac{11}{12}=\frac{1}{12}$$

β) Για το ενδεχόμενο Α είναι:

$$A=\left\{\omega\in\Omega / \frac{1-\omega^2}{(1+\omega^2)^2}\le 0\right\}=\left\{\omega\in\Omega / 1-\omega^2\le 0\right\}=\left\{\omega\in\Omega / \omega\ge 1 \text{ ή } \omega\le -1\right\}=\left\{\omega_1,\omega_3,\omega_4\right\}$$

$$P(A)=P(\omega_1)+P(\omega_3)+P(\omega_4)=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$$

Για το ενδεχόμενο Β είναι :

$$B=\left\{\omega\in\Omega / \frac{\omega}{\omega^2+1}+1>1\right\}=\left\{\omega\in\Omega / \frac{\omega}{\omega^2+1}>0\right\}=\left\{\omega\in\Omega / \omega>0\right\}=\left\{\omega_3,\omega_4\right\}$$

$$P(B)=P(\omega_3)+P(\omega_4)=\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{1}{6}$$

Για το ενδεχόμενο Γ είναι:

$$\Gamma=\left\{\omega\in\Omega / 4x^2+4\omega x+1\ge 0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}\right\}=\left\{\omega\in\Omega / 16(\omega^2-1)\le 0\right\}=\left\{\omega\in\Omega / -1\le\omega\le 1\right\}=\left\{\omega_1,\omega_2\right\}$$

$$P(\Gamma)=P(\omega_1)+P(\omega_2)=\frac{1}{6}+\frac{2}{3}=\frac{5}{6}$$

Για το ενδεχόμενο Α-Β είναι:

$$\mathrm{A}-\mathrm{B}=\left\{\omega_1\right\}$$

$$P(\mathrm{A}-\mathrm{B})=P(\omega_1)=\frac{1}{6}$$

Δ2 .Έχουμε $\lambda=\varepsilon\varphi 45^0=1=f'(x_0)$ όπου $A(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}, x\in\mathbb{R}$

Άρα $f'(x_0)=\dfrac{1-{x_0}^2}{(1+{x_0}^2)^2}=1 \Leftrightarrow 3{x_0}^2+{x_0}^4=0 \Leftrightarrow x_0=0, f(0)=1$.

Άρα το σημείο επαφής είναι το $A(0,1)$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Α είναι Q

$y=\lambda x+\beta$

$y=x+\beta$

και αφού διέρχεται από το Α θα είναι :

$\beta=1$

$y=x+1$

Δ3. Οι παρατηρήσεις διατεταγμένες κατά αύξουσα σειρά είναι : $\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4$ και επειδή το πλήθος είναι άρτιο (4) θα είναι $\delta_{\omega_\kappa}=\dfrac{\omega_2+\omega_3}{2}$. Ακόμα, οι τετεγμένες των σημείων Μκ , διατεταγμένες κατά αύξουσα σειρά είναι $\omega_1+1, \omega_2+1, \omega_3+1, \omega_4+1$ και άρα :

$$\delta_{y_k}=\frac{\omega_2+1+\omega_3+1}{2}=\frac{\omega_2+\omega_3+2}{2}$$

Έχουμε διαδοχικά από τις δεδομένες σχέσεις:

$$2\delta_{\omega_\kappa}=\delta_{y_k} \Leftrightarrow 2\frac{\omega_2+\omega_3}{2}=\frac{\omega_2+\omega_3+2}{2} \Leftrightarrow \omega_2+\omega_3=2 \Leftrightarrow \omega_3=2$$

$$R_{y_k}=\omega_4-\omega_1=5 \Leftrightarrow \omega_4+1=5 \Leftrightarrow \omega_4=4$$