ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 13 ΙΟΥΝΙΟΥ 2013
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0, να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 7

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat.

Μονάδες 4

Α3. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Ποια σημεία λέγονται *κρίσιμα σημεία* της f;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Για οποιονδήποτε μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|\bar{z}| = |-z|$

(μονάδες 2)

β) Αν μια συνάρτηση f είναι 1–1 στο πεδίο ορισμού της, τότε υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τεταγμένη.

(μονάδες 2)

γ) Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \left(-f(x)\right) = +\infty$

(μονάδες 2)

δ) Για δύο οποιεσδήποτε συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο x_0 ισχύει:

$$(f\,g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)$$

(μονάδες 2)

ε) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σε αυτό, τότε η f διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ.

(μονάδες 2)

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z, w για τους οποίους η εξίσωση

$$2x^2 - |w-4-3i|x = -2|z|, \quad x \in \mathbb{R}$$

έχει μια διπλή ρίζα, την $x=1$

Β1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των z στο μιγαδικό επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho_1 = 1$, καθώς επίσης ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των w στο μιγαδικό επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο Κ(4,3) και ακτίνα $\rho_2 = 4$

Μονάδες 8

Β2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός μιγαδικός αριθμός, η εικόνα του οποίου ανήκει και στους δύο παραπάνω γεωμετρικούς τόπους.

Μονάδες 5

Β3. Για τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z, w του ερωτήματος Β1 να αποδείξετε ότι:

$$|z-w| \le 10 \quad \text{και} \quad |z+w| \le 10$$

Μονάδες 6

Β4. Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z του ερωτήματος Β1 να βρείτε εκείνους, για τους οποίους ισχύει:

$$\left|2z^2 - 3z - 2z\bar{z}\right| = 5$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $2xf(x) + x^2(f'(x) - 3) = -f'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(1) = \dfrac{1}{2}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x)=\frac{x^3}{x^2+1}, \quad x\in\mathbb{R}$$

και στη συνέχεια ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f του ερωτήματος Γ1.

Μονάδες 4

Γ3. Να λύσετε στο σύνολο των πραγματικών αριθμών την ανίσωση:

$$f\left(5(x^2+1)^3-8\right)\le f\left(8(x^2+1)^2\right)$$

Μονάδες 7

Γ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(0,\ 1)$ τέτοιο, ώστε:

$$\int_0^{\xi^3-\xi} f(t)\,dt=-\xi\left(3\xi^2-1\right)f\left(\xi^3-\xi\right)$$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη, με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $[0,+\infty)$, για την οποία ισχύουν:

- $f(x)=x+\displaystyle\int_1^x\left(\int_1^u \frac{\left(f'(t)\right)^2-1}{f(t)}\,dt\right)du$ για κάθε $x>0$
- $f(x)\,f'(x)\neq 0$ για κάθε $x>0$ και $f(0)=0$

Θεωρούμε επίσης τις συναρτήσεις:

$$g(x)=\frac{f'(x)}{f(x)} \quad \text{με } x>0 \quad \text{και} \quad h(x)=\left(f'(x)\right)^3 \quad \text{με } x\ge 0$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x)\,f''(x)+1=\left(f'(x)\right)^2 \quad \text{για κάθε } x>0$$

Μονάδες 4

Δ2. **α.** Να βρείτε το πρόσημο των συναρτήσεων f και f' στο $(0,+\infty)$

(μονάδες 4)

β. Να αποδείξετε ότι $f'(0)=1$

(μονάδες 3)

Μονάδες 7

Δ3. Δεδομένου ότι η συνάρτηση g είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$, να αποδείξετε ότι:

α. $g(x)\geq 2-x$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$

(μονάδες 2)

β. $\displaystyle\int_0^1 (2-x)\,f(x)\,dx<1$

(μονάδες 4)

Μονάδες 6

Δ4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης h, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$

Μονάδες 8

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και **να μην γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.

3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, και μόνο για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 18:00

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

Λύσεις θεμάτων επαναληπτικών πανελληνίων εξετάσεων 2013

Στο μάθημα: « Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης»
ΗΜΕΡΗΣΙΑ ΓΕ.Λ.

Γ΄Λυκείου Κατεύθυνσης
Πέμπτη, 13 Ιουνίου 2013

Θέμα Α:

Α1. Θεωρία, σελ.217 Σχολικό Βιβλίο (απόδειξη)

Α2. Θεωρία, σελ.260 Σχολικό Βιβλίο (διατύπωση θεωρήματος)

Α3. Θεωρία, σελ. 261 Σχολικό Βιβλίο (*Κρίσιμα σημεία λέγονται τα εσωτερικά σημεία του Δ, στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγος της είναι μηδέν)*

Α4.

α) Σωστό **β) Λάθος** **γ) Σωστό** **δ) Λάθος** **ε) Σωστό**

Θέμα Β

Β1.Αφού το $x=1$ είναι διπλή ρίζα της δοθείσας εξίσωση θα έχουμε:

$\Delta = 0 \Leftrightarrow |w-4-3\iota|^2 = 16|z|$ (1)

$2-|w-4-3\iota| = -2|z| \Leftrightarrow |w-4-3\iota| = 2+2|z|$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$(2+2|z|)^2 = 1616|z| \Leftrightarrow |z|^2 - 2|z| + 1 = 0 \Leftrightarrow (|z|-1)^2 = 0 \Leftrightarrow |z| = 1$ και άρα η εκόνα του z στο μιγαδικό επίπεδο είναι κύκλος κέντρου Ο(0,0) και ακτίνας $\rho_1 = 1$

Η σχέση (1) δίνει $|w-4-3\iota| = 4$ και άρα η εκόνα του w στο μιγαδικό επίπεδο είναι κύκλος κέντρου $K(4,3)$ και ακτίνας $\rho_2 = 4$.

Β2. Αν κ=α+βi ($a, \beta \in \mathbb{R}$) ο μιγαδικός αριθμός που ανήκει ταυτόχρονα και στους δύο παραπάνω γεωμετρικούς τόπους θα έχουμε:

$|\kappa|=1$

$|\kappa-4-3\iota|=4 \Leftrightarrow |\kappa-4-3\iota|^2=16 \Leftrightarrow (\kappa-4-3\iota)(\overline{\kappa}-4+3\iota)=16 \Leftrightarrow$

$k\overline{k}-4k+3ki-4\overline{k}+16-12i-3\overline{k}i+12i+9=16 \Leftrightarrow$

$1-4k-4\overline{k}+3ki-3\overline{k}i+9=0 \Leftrightarrow 10-4(k+\overline{k})+3i(k-\overline{k})=0 \Leftrightarrow 10-8\alpha-6\beta=0$

$8\alpha+6\beta=10 \Leftrightarrow 4a+3\beta=5 \Leftrightarrow a=\dfrac{5-3\beta}{4}$

$a^2+\beta^2=1 \Leftrightarrow (5\beta-3)^2=0 \Leftrightarrow \beta=\dfrac{3}{5}$

$\alpha=\dfrac{4}{5}$

και άρα ο μιγαδικός κ είναι μοναδικός και είναι ο $k=\dfrac{4}{5}+\dfrac{3}{5}i$

B3. Έχουμε :

$||w|-|4+3i|| \le |w-4-3\iota|=4 \Rightarrow ||w|-5| \le 4 \Rightarrow |w| \le 9$

$|z+w| \le |z|+|w| \le 1+9=10$

$|z-w| \le 2\rho_1+2\rho_2=10(\rho_1,\rho_2$ αντίστοιχα οι ακτίνες των δύο παραπάνω κύκλων)

B4. Έχουμε:

$|2z^2-3z-2z\overline{z}|=5 \Leftrightarrow |z||2z-3-2\overline{z}|=5 \Rightarrow |2z-3-2\overline{z}|=1(z=a+\beta i, a,\beta \in \mathbb{R})$

$|4\beta i-3|=5 \Leftrightarrow 16\beta^2+9=25 \Leftrightarrow \beta=1, \beta=-1$

$\alpha^2+\beta^2=1 \Rightarrow a=0$

Άρα οι ζητούμνοι μιγαδικοί αριθμοί είναι : $\begin{matrix} z_1=i \\ z_2=-i \end{matrix}$

Θέμα Γ

Γ1. Έχουμε διαδοχικά:

$2xf(x)+x^2f'(x)-3x^2=-f'(x)$

$2xf(x)+x^2f'(x)+f'(x)=3x^2$

$2xf(x)+(x^2+1)f'(x)=3x^2$

$((x^2+1)f(x))'=(x^3)'$

$(x^2+1)f(x)=x^3+c$

$x=1 \Rightarrow 2f(1)=1+c \Rightarrow c=0$

$(x^2+1)f(x)=x^3 \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}, x\in\mathbb{R}$

Η f ε'ιναι παραγωγίσιμη στο R με

$f'(x)=\dfrac{3x^2}{(x^2+1)^2}>0, x\in\mathbb{R}$ και έτσι η f είναι γνησίως αύξουσα στο R.

Γ2. Για τις ασύμπτωτες:

Δεν υπάρχουν κατακόρυφες ασύμπτωτες αφού $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq\pm\infty,$ για κάθε $x_0\in\mathbb{R}$

Στο $+\infty$ έχουμε:

$$y=\lambda x+\beta$$

$$\lambda=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^3+x}=1$$

$$\beta=\lim_{x\to\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x^2+1}=0$$

$$y=x$$

Στο $-\infty$ έχουμε

$$\lambda=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^3+x}=1$$

$$\beta=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{x^2+1}=0$$

$$y=x$$

Άρα η f έχει ασύμπτωτη την $y=x$ στο $+\infty$ και $-\infty$

Γ3. Η ανίσωση ,επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο R, θα γίνει διαδοχικά:

$$f(5(x^2+1)^3-8)\leq f(8(x^2+1)^2)$$

$$5(x^2+1)^3-8\leq 8(x^2+1)^2$$

$$5(x^2+1)^3\leq 8((x^2+1)^2+1)$$

$$\frac{(x^2+1)^3}{(x^2+1)^2+1}\leq\frac{8}{5}$$

$$f(x^2+1)\leq f(2)$$

$$x^2+1\leq 2$$

$$-1\leq x\leq 1$$

Γ4. Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x)=x\int_0^{x^3-x} f(t)dt, x\in[0,1]$ και εφαρμόζουμε το θεώρημα του Rolle στο $[0,1]$.

Έχουμε:

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με $g'(x)=\int_0^{x^3-x} f(t)dt+xf(x^3-x)(3x^2-1)$

$g(0)=0$
$g(1)=0$
Άρα υπάρχει ,ένα τουλάχιστον, $\xi\in(0,1): g'(\xi)=0 \Rightarrow \int_0^{\xi^3-\xi} f(t)dt = -\xi f(\xi^3-\xi)(3\xi^2-1)=0$

Θέμα Δ

Δ1. Θέτουμε: $\int_1^u \frac{(f'(t))^2-1}{f(t)}dt = g(u)$ και η δοθείσα σχέση γίνεται: $f(x)=x+\int_1^x g(u)du$. (1)

Η συνάρτηση $\int_1^x g(u)du$ είναι παραγωγίσιμη αφού και η $\int_1^u \frac{(f'(t))^2-1}{f(t)}dt = h(u)$ είναι παραγωγίσιμη αφού η $\frac{(f'(t))^2-1}{f(t)}$ είναι συνεχής ως πάξεις συνεχών.
Παραγωγίζοντας την (1) για χ>0 έχουμε διαδοχικά:

$f'(x)=1+h(x)$

$f'(x)=1+\int_1^x \frac{(f'(t))^2-1}{f(t)}dt$

$f''(x)=\frac{(f'(x))^2-1}{f(x)} \Leftrightarrow f''(x)f(x)+1=(f'(x))^2, x>0$

Δ2. α) Αφού $f(x)f'(x)\neq 0, x>0$ και η $f(x)f'(x)$ είναι συνεχής (ως παραγωγίσιμη) σημαίνει ότι διατηρεί σταθερό πρόσημο για χ>0.

$f(1)=1>0$
$f'(1)=1>0$
$f(1)f'(1)=1>0$
Άρα $f(x)f'(x)>0$, για κάθε x>0, δηλαδή η $f(x), f'(x)$ έχουν το ίδιο πρόσημο και αφού $\begin{matrix} f(1)=1>0 \\ f'(1)=1>0 \end{matrix}$ θα είναι $\begin{matrix} f(x)>0 \\ f'(x)>0 \end{matrix}$,x>0

β) Η σχέση του ερωτήματος Δ1 έχουμε (αφού και η f΄ είναι συνεχής):
$\lim_{x\to 0^+}(f'(x))^2=(f'(0))^2 \Leftrightarrow (f'(0))^2=\lim_{x\to 0^+}(f(x)f''(x)+1)=f(0)f''(0)+1=1$ και άρα
$(f'(0))^2=1 \Leftrightarrow f'(0)=1$ η $f'(0)=-1$ αφού όμως $f'(x)>0, x>0$ θα είναι $f'(0)=1$

Δ3.

α) Θα βρούμε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της g στο σημείο $A(1,g(1))$. Είναι $g(1)=\dfrac{f'(1)}{f(1)}=1$. Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\infty)$,ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $g'(x)=\dfrac{f''(x)f(x)-(f'(x))^2}{f^2(x)}, x>0$ με $g'(1)=-1$ (αφού$f''(1)=0$) και έτσι η εφαπτομένη είναι $\begin{array}{l} y-1=g'(1)(x-1) \\ y=-x+2 \end{array}$. Επειδή η g είναι κυρτή στο $(0,\infty)$ θα έχουμε ότι $g(x)\geq -x+2, x\in(0,\infty)$

β) Από την προηγούμενη σχέση θα έχουμε:
$g(x)\geq -x+2 \Rightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)}\geq 2-x \Rightarrow f'(x)\geq(2-x)f(x),$ αφού $f(x)>0$ και άρα θα έχουμε
$\int_0^1 f'(x)dx>\int_0^1(2-x)f(x)dx \Rightarrow f(1)-f(0)>\int_0^1(2-x)f(x)dx \Rightarrow \int_0^1(2-x)f(x)dx<1$

Δ4. Το ζητούμενο εμβαδόν θα είναι διαδοχικά και με την χρήση του ερωτήματος Δ1.

$E(\Omega)=\int_0^1\left|f'(x)^3\right|=\int_0^1 f'(x)^3dx=\int_0^1 f'(x)(f'(x))^2dx=[f(x)f'(x))^2]_0^1-\int_0^1 f(x)f'(x)f''(x)=$
$1-\int_0^1(1-f'(x)^2)f'(x)dx=1-\int_0^1 f'(x)dx+2\int_0^1(f'(x))^3dx=1-f(1)-f(0)+2\mathrm{E}(\Omega)$
$\mathrm{E}(\Omega)=2\mathrm{E}(\Omega)-1\Rightarrow \mathrm{E}(\Omega)=1$ τ.μ.