

ΘΕΜΑ Α

A1. Τι ονομάζεται διάμεσος δ ενός δείγματος n παρατηρήσεων που έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά;

Μονάδες 6

A2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε δεν είναι παραγωγίσιμη

στο x_0 (Μονάδες 2)

β) Το εύρος ως παράμετρος διασποράς εξαρτάται μόνο από τις ακραίες τιμές της μεταβλητής.

(Μονάδες 2)

γ) Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[a, \beta]$. Τότε ισχύει η ακόλουθη ιδιότητα για το ορισμένο ολοκλήρωμα:

$$\int_a^\gamma f(x)dx + \int_\beta^\gamma f(x)dx = \int_a^\beta f(x)dx, \text{ με } a < \gamma < \beta. \quad (\text{Μονάδες 2})$$

δ) Ισχύει ότι: $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $x > 0$

(Μονάδες 2)

ε) Έστω δύο συνεχείς συναρτήσεις $f, g: [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχείς παραγώγους f', g' . Τότε ισχύει ότι:

$$\int_a^\beta f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^\beta - \int_a^\beta f(x)g'(x)dx \quad (\text{Μονάδες 2})$$

Μονάδες 10

A3. Να μεταφέρετε και να συμπληρώσετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισότητες:

α) $\int_a^\beta \frac{1}{x} dx = \dots$ με $\beta > a > 0$ (Μονάδες 3)

β) Έστω συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(A) \subseteq B$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x \in A$ και η g παραγωγίσιμη σε κάθε $f(x) \in B$, τότε η σύνθεσή τους $g \circ f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο A και ισχύει ότι:
 $(g \circ f)'(x) = \dots$ (Μονάδες 3)

γ) $\int_a^\beta c dx = \dots$ με c σταθερά και $a, \beta \in \mathbb{R}$ (Μονάδες 3)

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Β

Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι ημερήσιες ώρες διαβάσματος 25 μαθητών μιας τάξης ενός ΕΠΑ.Λ.

Ημερήσιες ώρες Διαβάσματος x_i	Μαθητές v_i	Αθροιστική Συχνότητα N_i	Σχετική συχνότητα (%) $f_i \%$	$x_i v_i$
1	6			
2	5			
3	4			
4	κ			
5	$2\kappa+1$			
Σύνολα	$n=25$		100	

B1. Να υπολογίσετε τον αριθμό κ

Μονάδες 4

B2. Για $\kappa=3$ να μεταφέρετε και να συμπληρώσετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα.

Μονάδες 8

B3. Για $\kappa=3$ να υπολογίσετε τη μέση τιμή \bar{x} και να βρείτε τη διάμεσο δ των παρατηρήσεων. **Μονάδες 10**

B4. Για $\kappa=3$ να υπολογίσετε το ποσοστό των μαθητών που διαβάζουν τουλάχιστον 3 ώρες ημερησίως. **Μονάδες 3**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}, & \text{αν } x > 1 \\ \alpha x^2 + \beta x, & \text{αν } x \leq 1 \end{cases} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Γ1. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ **Μονάδες 5**

Γ2. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ **Μονάδες 10**

Γ3. Να υπολογίσετε τα α και β , ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0=1$ και η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από το σημείο $A(-1,2)$. **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο: $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$

Δ1. Να βρείτε την παράγουσα F της f , αν $F(0)=1$ **Μονάδες 5**

Δ2. Αν $F(x) = x^3 - x^2 - x + 1$, $x \in \mathbb{R}$ να μελετήσετε τη μονotonία και να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της F . **Μονάδες 8**

Δ3. Να συγκρίνετε τις τιμές $F(2011)$ και $F(2012)$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **Μονάδες 5**

Δ4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=0$ και $x=1$. **Μονάδες 7**

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολ. Βιβλίο σελ: 81

A2. α. $\triangleright \Sigma$ β. $\triangleright \Sigma$ γ. $\triangleright \Lambda$ δ. $\triangleright \Sigma$ ε. $\triangleright \Sigma$

A3. α. $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{x} dx = [\ln x]_{\alpha}^{\beta} = \ln \beta - \ln \alpha$

β. $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

γ. $\int_{\alpha}^{\beta} c dx = c[x]_{\alpha}^{\beta} = c(\beta - \alpha)$

ΘΕΜΑ Β

B1. Έχουμε ότι $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 = v \Leftrightarrow 6 + 5 + 4 + \kappa + 2\kappa + 1 = 25 \Leftrightarrow 3\kappa = 9 \Leftrightarrow \kappa = 3$

B2.

x_i	v_i	N_i	$f_i \%$	$x_i v_i$
1	6	6	24	6
2	5	11	20	10
3	4	15	16	12
4	3	18	12	12
5	7	25	28	35
Σύνολα	25	-	100	75

B3. $\bar{x} = \frac{x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 + x_4 v_4 + x_5 v_5}{v} = \frac{75}{25} = 3$

Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι περιττός αριθμός, οπότε η διάμεσος είναι η μεσαία παρατήρηση, δηλαδή η 13η παρατήρηση. Άρα $\delta=3$.

B4. Το ποσοστό των μαθητών που διαβάζουν τουλάχιστον τρεις ώρες ημερησίως είναι $f_3\% + f_4\% + f_5\% = 56\%$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (\alpha x^2 + \beta x) = \alpha + \beta$

Γ2. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3})^2 - 2^2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{x+3-4} =$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (\sqrt{x+3}+2) = 4$

Γ3. Για να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ πρέπει $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \alpha + \beta = 4$. Αφού η γραφική παράσταση της f

διέρχεται από το $A(-1,2)$ είναι $f(-1) = 2 \Leftrightarrow \alpha - \beta = 2$. Λύνουμε το σύστημα: $\begin{cases} \alpha + \beta = 4 \\ \alpha - \beta = 2 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 3 \text{ και } \beta = 1$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $F(x) = x^3 - x^2 - x + c$

$F(0) = 1 \Leftrightarrow c = 1$

Άρα, $F(x) = x^3 - x^2 - x + 1$

Δ2. Η F είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} ως πολυωνυμική με $F'(x) = f(x) = 3x^2 - 2x - 1$

$F'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -\frac{1}{3}$

Ο πίνακας μεταβολών της F είναι:

x	$-\infty$	$-1/3$	1	$+\infty$	
$F'(x)$	+	0	-	0	+
$F(x)$	↗		↘		↗

Η F είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right]$ και $[1, +\infty)$.

Η F είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[-\frac{1}{3}, 1\right]$.

Η F παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x = -\frac{1}{3}$ με τιμή $F\left(-\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}\right)^3 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - \left(-\frac{1}{3}\right) + 1 = \frac{32}{27}$ και τοπικό ελάχιστο

στο $x = 1$ με τιμή $F(1) = 0$.

Δ3. $2011, 2012 \in [1, +\infty)$ στο διάστημα αυτό η F είναι γνησίως αύξουσα άρα $2011 < 2012 \Leftrightarrow F(2011) < F(2012)$

Δ4. Επειδή $F'(x) = f(x)$, ο πίνακας προσήμων της $F'(x)$ είναι ο πίνακας προσήμων της $f(x)$ από τον οποίο φαίνεται ότι $f(x) < 0$ για $x \in [0, 1]$. Άρα:

$E(\Omega) = \int_0^1 |f(x)| dx = \int_0^1 -f(x) dx = -\int_0^1 F'(x) dx = -[F(x)]_0^1 = -(0-1) = 1 \text{ τ.μ.}$