ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΡΙΤΗ 8 ΙΟΥΛΙΟΥ 2003

ΘΕΜΑ 2ο

α. Να περιγράψετε γεωμετρικά το σύνολο (Σ) των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z που ικανοποιούν τις σχέσεις: $|z| = 2$ και $\text{Im}(z) \geq 0$. Μονάδες 12

β. Να αποδείξετε ότι, αν η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z κινείται στο σύνολο (Σ), τότε η εικόνα του μιγαδικού αριθμού $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{4}{z}\right)$ κινείται σε ευθύγραμμο τμήμα το οποίο βρίσκεται στον άξονα x΄x . Μονάδες 13

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΕΤΑΡΤΗ 4 ΙΟΥΝΙΟΥ 2003

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z = x + yi, όπου x, y πραγματικοί αριθμοί και $w = \frac{i\,(i+z)}{i-z}$

με $z \neq i$.Να αποδείξετε ότι : **α.** $w = \frac{2x}{x^2+(y-1)^2} + \frac{1 - x^2 - y^2}{x^2+(y-1)^2}\, i$, Μονάδες 8

β. αν ο w είναι πραγματικός αριθμός, τότε η εικόνα του z ανήκει σε κύκλο κέντρου Ο(0 , 0) και ακτίνας $\rho_1 = 1$ Μονάδες 8

γ. αν ο z είναι πραγματικός αριθμός, τότε η εικόνα του w ανήκει σε κύκλο κέντρου Ο(0 , 0) και ακτίνας $\rho_2 = 1$. Μονάδες 9

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 4 ΙΟΥΝΙΟΥ 2004

ΘΕΜΑ 4ο

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z = x + yi, όπου x, y πραγματικοί αριθμοί, για τους οποίους υπάρχει α ∈ IR ώστε να ισχύει: $\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2+\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^2 i=\alpha+(1-\alpha)i$

Να αποδείξετε ότι:

α. αν Im(z) = 0, τότε α = 1. *Μονάδες 5*

β. αν α = 0, τότε $z^2 + 1 = 0$. *Μονάδες 5*

γ. για τον πραγματικό αριθμό α ισχύει: $0 \le \alpha \le 1$. *Μονάδες 7*

δ. οι εικόνες Μ των μιγαδικών αυτών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο ανήκουν σε κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα. *Μονάδες 8*

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΤΕΤΑΡΤΗ 7 ΙΟΥΛΙΟΥ 2004

ΘΕΜΑ 4ο

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z = x + yi , όπου x, y πραγματικοί αριθμοί, για τους οποίους υπάρχει k ∈ IR ώστε να ισχύει: x = 3−k και y = 2k+1 .

Να αποδείξετε ότι:

α) αν 3 Re(z) + 4 Im(z) = 3, τότε k = −2. *Μονάδες 9*

β) αν $|z-1|=\sqrt{5}$, τότε $|z|=\sqrt{10}$. *Μονάδες 10*

γ) οι εικόνες Μ των μιγαδικών αυτών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο ανήκουν σε ευθεία, της οποίας να βρείτε την εξίσωση. *Μονάδες 6*

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 31 ΜΑΪΟΥ 2005

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 με $|z_1|=|z_2|=|z_3|=3$.

α. Δείξτε ότι: $\overline{z_1}=\dfrac{9}{z_1}$ Μονάδες 7

β. Δείξτε ότι ο αριθμός $\dfrac{z_1}{z_2}+\dfrac{z_2}{z_1}$ είναι πραγματικός . Μονάδες 9

γ. Δείξτε ότι: $|z_1+z_2+z_3|=\dfrac{1}{3}|z_1\cdot z_2+z_2\cdot z_3+z_3\cdot z_1|$. Μονάδες 9

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΤΕΤΑΡΤΗ 6 ΙΟΥΛΙΟΥ 2005

ΘΕΜΑ 2ο

α. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει $z_1+z_2=4+4i$ και $2z_1-\overline{z_2}=5+5i$, να βρείτε τους z_1, z_2. Μονάδες 10

β. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z,w ισχύουν

$$|z-1-3i|\le\sqrt{2} \text{ και } |w-3-i|\le\sqrt{2}:$$

i. να δείξετε ότι υπάρχουν μοναδικοί μιγαδικοί αριθμοί z, w έτσι, ώστε z = w Μονάδες 10

ii. να βρείτε τη μέγιστη τιμή του $|z-w|$. Μονάδες 5

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 8 ΙΟΥΝΙΟΥ 2005

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί: $z=\lambda^2-2+(3-2\lambda)i$, $\lambda\in\mathbb{R}$ και $w=k+4i$, $k>0$.

Για τους z, w ισχύουν: $Re(z)+Im(z)=0$ και $|w|=5$.

α. Να αποδείξετε ότι $z=-1+i$. Μονάδες 8

β. Να αποδείξετε ότι $k=3$. Μονάδες 8

γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\mu\in\mathbb{R}$, για το οποίο ισχύει $z+\mu\overline{z}=3i-w$ Μονάδες 9

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 8 ΙΟΥΛΙΟΥ 2005

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z=\dfrac{x+3i}{2-i}$, $x\in\mathbb{R}$.

α. Να βρείτε το x, ώστε ο αριθμός z να είναι φανταστικός. Μονάδες 10

β. Αν x = –6, να αποδείξετε ότι ο z είναι πραγματικός αριθμός. Μονάδες 6

γ. Αν x = 4, να βρείτε το $|\bar{z}|$. Μονάδες 9

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΣΑΒΒΑΤΟ 27 ΜΑΪΟΥ 2006

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 με $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ και $z_1+z_2+z_3=0$

α. Να αποδείξετε ότι:

i. $|z_1-z_2|=|z_3-z_1|=|z_2-z_3|$. Μονάδες 9

ii. $|z_1-z_2|^2\le 4$ και $\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)\ge -1$ Μονάδες 8

β. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των z_1, z_2, z_3 στο μιγαδικό επίπεδο, καθώς και το είδος του τριγώνου που αυτές σχηματίζουν. Μονάδες 8

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΤΕΤΑΡΤΗ 31 ΜΑΪΟΥ 2006

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 4x + 13 = 0$ (1)

α. Να λυθεί στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών η εξίσωση (1). Μονάδες 9

β. Αν z_1, z_2 οι ρίζες της εξίσωσης (1), τότε να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης

$A=|z_1|^2-2|z_1\cdot z_2|+\sqrt{13}|\bar{z}_2|+i^{2006}$. Μονάδες 9

γ. Αν $z_1 = 2+3i$, τότε να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους ισχύει: $|z-z_1|=5$ Μονάδες 7

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 24 ΜΑΪΟΥ 2007

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z=\dfrac{2+\alpha\cdot i}{\alpha+2i}$ με $\alpha\in\mathbb{R}$.

α. Να αποδειχθεί ότι η εικόνα του μιγαδικού z ανήκει στον κύκλο με κέντρο Ο(0,0) και ακτίνα ρ =1. Μονάδες 9

β. Έστω z_1 , z_2 οι μιγαδικοί που προκύπτουν από τον τύπο $z=\dfrac{2+\alpha\cdot i}{\alpha+2i}$ για α = 0 και α=2 αντίστοιχα.

i. Να βρεθεί η απόσταση των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z_1 και z_2 . Μονάδες 8

ii. Να αποδειχθεί ότι ισχύει $(z_1)^{2\nu}=(-z_1)^{\nu}$ για κάθε φυσικό αριθμό ν. Μονάδες 8

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΤΡΙΤΗ 3 ΙΟΥΛΙΟΥ 2007

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1 = α+βi και $z_2=\dfrac{2-\overline{z_1}}{2+\overline{z_1}}$ όπου α,β ∈IR με β ≠ 0. Δίνεται επίσης ότι $z_2 - z_1 \in$IR .

α. Να αποδειχθεί ότι $z_2 - z_1 = 1$. Μονάδες 9

β. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z_1 στο μιγαδικό επίπεδο. Μονάδες 6

γ. Αν ο αριθμός z_1^2 είναι φανταστικός και αβ>0, να υπολογισθεί ο z_1 και να δειχθεί ότι $\left(z_1+1+i\right)^{20}-\left(\overline{z_1}+1-i\right)^{20}=0$ Μονάδες 10

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 30 ΜΑΪΟΥ 2007

ΘΕΜΑ 2ο

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z=(λ-2)+2λi, όπου λ∈R.

α. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z. Μονάδες 9

β. Αν ισχύει $z+\bar{z}=2$ να βρείτε το $\text{Re}\left(\frac{1}{z}\right)$. Μονάδες 7

γ. Αν $|z|=2$ και Im(z)≠0, να βρείτε το λ. Μονάδες 9

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΤΕΤΑΡΤΗ 4 ΙΟΥΛΙΟΥ 2007

ΘΕΜΑ 2ο

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει $|z-1+i|=|iz|$.

α. i) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων Μ των μιγαδικών z. Μονάδες 10

ii) Να βρείτε ποια από τα σημεία Μ απέχουν από την αρχή Ο(0,0) απόσταση ίση με $\sqrt{5}$. Μονάδες 10

β. Αν Re(z)=0, τότε να δείξετε ότι z=–i. Μονάδες 5

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 24 ΜΑΪΟΥ 2008

ΘΕΜΑ 2^{ο}

Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z και w ισχύουν

$|(i+2\sqrt{2})z|=6$ και $|w-(1-i)|=|w-(3-3i)|$ τότε να βρείτε:

α. το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z . Μονάδες 6

β. το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w . Μονάδες 7

γ. την ελάχιστη τιμή του $|w|$ Μονάδες 6

δ. την ελάχιστη τιμή του $|z-w|$ Μονάδες 6

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΠΕΜΠΤΗ 3 ΙΟΥΛΙΟΥ 2008

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται ότι ο μιγαδικός αριθμός $z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $z^2+\beta z+\gamma=0$, όπου β και γ πραγματικοί αριθμοί.

α. Να αποδείξετε ότι $\beta=-1$ και $\gamma=1$. Μονάδες 9

β. Να αποδείξετε ότι $z_1^3=-1$ Μονάδες 8

γ. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού αριθμού w, για τον οποίο ισχύει: $|w| = |z_1 - \bar{z}_1|$ Μονάδες 8

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΤΕΤΑΡΤΗ 28 ΜΑΪΟΥ 2008

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η εξίσωση $3z^2 + \lambda z + \mu = 0$, όπου λ, μ είναι πραγματικοί αριθμοί.

Α. Αν ο αριθμός $z_1 = 1 + i$ είναι ρίζα της εξίσωσης, να αποδείξετε ότι $\lambda = -6$, $\mu = 6$ και να βρείτε τη δεύτερη ρίζα z_2 της εξίσωσης. Μονάδες 14

Β. Να αποδείξετε ότι: **α.** $z_1^2 + z_2^2 = 0$ Μονάδες 6

β. $z_1^{2008} + z_2^{2008} = 2^{10}$ Μονάδες 5

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΤΕΤΑΡΤΗ 20 ΜΑΪΟΥ 2009

ΘΕΜΑ 2ο

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $z=(2\lambda+1)+(2\lambda-1)i$, $\lambda \in R$

Α. α. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία βρίσκονται οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z, για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in R$ Μονάδες 9

β. Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός αριθμός έχει το μικρότερο δυνατό μέτρο. Μονάδες 8

Β. Να βρεθούν οι μιγαδικοί αριθμοί w οι οποίοι ικανοποιούν την εξίσωση $|w|^2 + \bar{w} - 12 = z_o$

όπου z_o ο μιγαδικός αριθμός που αναφέρεται στο προηγούμενο ερώτημα. Μονάδες 8

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 9 ΙΟΥΛΙΟΥ 2009

ΘΕΜΑ 2^ο

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει: $(2-i)z+(2-i)\overline{z}-8=0$

α. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z = x+yi οι οποίοι ικανοποιούν την παραπάνω εξίσωση. Μονάδες 10

β. Να βρείτε τον μοναδικό πραγματικό αριθμό z_1 και τον μοναδικό φανταστικό αριθμό z_2 οι οποίοι ικανοποιούν την παραπάνω εξίσωση. Μονάδες 8

γ. Για τους αριθμούς που βρέθηκαν στο προηγούμενο ερώτημα να αποδείξετε ότι

$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=40$ Μονάδες 7

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 26 ΜΑΪΟΥ 2009

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1=2+3i$ και $z_2=(1-i)^2+3i^{2009}+1$

α. Να αποδείξετε ότι $z_2 = 1 + i$. Μονάδες 8

β. Να βρείτε το μέτρο του μιγαδικού αριθμού $\overline{z_1}-z_2$. Μονάδες 7

γ. Να εκφράσετε το πηλίκο $\frac{z_1}{z_2}$ στη μορφή κ+λi , όπου κ, λ $\in\mathbb{R}$. Μονάδες 10

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΤΕΤΑΡΤΗ 19 ΜΑΪΟΥ 2010

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η εξίσωση $z+\frac{2}{z}=2$ όπου $z\in\mathbb{C}$ με $z\neq 0$

Β1. Να βρείτε τις ρίζες z_1 και z_2 της εξίσωσης. Μονάδες 7

Β2. Να αποδείξετε ότι $z_1^{2010}+z_2^{2010}=0$ Μονάδες 6

Β3. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς w ισχύει $|w-4+3i|=|z_1-z_2|$ τότε να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των w στο μιγαδικό επίπεδο. Μονάδες 7

Β4. Για τους μιγαδικούς αριθμούς w του ερωτήματος **Β3**, να αποδείξετε ότι $3\leq|w|\leq 7$

Μονάδες 5

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΤΕΤΑΡΤΗ 7 ΙΟΥΛΙΟΥ 2010

ΘΕΜΑ Β

Έστω ότι οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 είναι οι ρίζες εξίσωσης δευτέρου βαθμού με πραγματικούς συντελεστές για τις οποίες ισχύουν

$z_1 + z_2 = -2$ και $z_1 \cdot z_2 = 5$

Β1. Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2 Μονάδες 5

Β2. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς w ισχύει η σχέση $|w - z_1|^2 + |w - z_2|^2 = |z_1 - z_2|^2$ να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των w στο μιγαδικό επίπεδο είναι ο κύκλος με εξίσωση $(x+1)^2 + y^2 = 4$ Μονάδες 8

Β3. Από τους μιγαδικούς αριθμούς w του ερωτήματος **Β2** να βρείτε εκείνους για τους οποίους ισχύει $2 \cdot Re(w) + Im(w) = 0$ Μονάδες 6

Β4. Αν w_1, w_2 είναι δύο από τους μιγαδικούς w του ερωτήματος **Β2** με την ιδιότητα $|w_1 - w_2| = 4$, να αποδείξετε ότι $|w_1 + w_2| = 2$. Μονάδες 6

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑΣ Β΄) ΤΡΙΤΗ 25 ΜΑΪΟΥ 2010

ΘΕΜΑ Β

Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z = x + yi$ με $x, y \in \mathbb{R}$.

Β1. Αν ισχύει ότι $2z - i\,\overline{z} = 3$, τότε να βρείτε τον μιγαδικό αριθμό z. Μονάδες 8

Β2. Αν $z = 2 + i$, τότε να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w για τους οποίους ισχύει ότι: $|w + z| = |z^2|$. Μονάδες 7

Β3. Αν $z = 2 + i$ και $u = \dfrac{\overline{z} + iz}{\overline{z} - 1}$, τότε να αποδείξετε ότι: $u^{2010} = -1$. Μονάδες 10

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΠΕΜΠΤΗ 8 ΙΟΥΛΙΟΥ 2010

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε την εξίσωση $z^2 - 6z + \gamma = 0$ με $\gamma \in \mathbb{R}$, η οποία έχει ρίζες τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2 με $\mathrm{Im}(z_1) > 0$ και $|z_1| = 5$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\gamma = 25$. Μονάδες 8

Γ2. Αν $\gamma = 25$, να βρείτε τις ρίζες της παραπάνω εξίσωσης. Μονάδες 5

Γ3. Αν για τον μιγαδικό αριθμό w ισχύει $|w - z_1| = |w - z_2|$, να αποδείξετε ότι $w \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 6

Γ4. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $(z_1 - 2 - 3i)^8 + (z_2 - 4 + 5i)^8$. Μονάδες 6

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄) ΔΕΥΤΕΡΑ 16 ΜΑΪΟΥ 2011

ΘΕΜΑ Β

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z και w με $z \neq 3i$, οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$|z - 3i| + |\bar{z} + 3i| = 2 \text{ και } w = z - 3i + \frac{1}{z - 3i}$$

Β1. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z Μονάδες 7

Β2. Να αποδείξετε ότι $\bar{z} + 3i = \frac{1}{z - 3i}$ Μονάδες 4

Β3. Να αποδείξετε ότι ο w είναι πραγματικός αριθμός και ότι $-2 \leq w \leq 2$ Μονάδες 8

Β4. Να αποδείξετε ότι: $|z - w| = |z|$ Μονάδες 6

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣΓ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥΔΕΥΤΕΡΑ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2011

ΘΕΜΑ Β

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z, w, οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις: $|z-i|=1+Im(z)$ (1) και

$w\left(\overline{w}+3i\right)=i\left(3\overline{w}+i\right)$ (2)

Α1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι η παραβολή με εξίσωση $y=\frac{1}{4}x^2$ Μονάδες 7

Β2. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο Κ(0, 3) και ακτίνα ρ=2$\sqrt{2}$. Μονάδες 7

Β3. Να βρείτε τα σημεία Α και Β του μιγαδικού επιπέδου, τα οποία είναι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z, w με z =w. Μονάδες 5

Β4. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΚΑΒ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές και, στη συνέχεια, να βρείτε τον μιγαδικό αριθμό u με εικόνα στο μιγαδικό επίπεδο το σημείο Λ, έτσι ώστε το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία Κ, Α, Λ, Β να είναι τετράγωνο. Μονάδες 6

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄) ΔΕΥΤΕΡΑ 16 ΜΑΪΟΥ 2011

ΘΕΜΑ Β

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z και w με z≠3i, οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις:

$|z-3i|+|\overline{z}+3i|=2$ και $w=z-3i+\frac{1}{z-3i}$.

Β1. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z Μονάδες 7

Β2. Να αποδείξετε ότι $\overline{z}-3i=\frac{1}{z-3i}$ Μονάδες 4

Β3. Να αποδείξετε ότι ο w είναι πραγματικός αριθμός και ότι $-2\leq w\leq 2$ Μονάδες 8

Β4. Να αποδείξετε ότι: $|z-w|=|z|$ Μονάδες 6

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΔΕΥΤΕΡΑ 28 ΜΑΪΟΥ 2012

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z και w για τους οποίους ισχύουν οι επόμενες σχέσεις:

$|z-1|^2+|z+1|^2=4$ (1)

$|w-5\overline{w}|=12$ (2)

Β1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ = 1,.

Μονάδες 6

Β2. Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z με $|z_1-z_2|=\sqrt{2}$, τότε να βρείτε το $|z_1+z_2|$.

Μονάδες 7

Β3. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w στο επίπεδο είναι η έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ και στη συνέχεια να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|w|$.

Μονάδες 6

Β4. Για τους μιγαδικούς αριθμούς z,w που επαληθεύουν τις σχέσεις (1) και (2) να αποδείξετε ότι:

$$1\leq|z-w|\leq 4$$

Μονάδες 6

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 14 ΙΟΥΝΙΟΥ 2012

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z, με $z \neq -1$ για τους οποίους ο αριθμός $w=\dfrac{z-1}{z+1}$ είναι φανταστικός.

Να αποδείξετε ότι:

Β1. $|z|=1$

Μονάδες 7

Β2. Ο αριθμός $\left(z-\dfrac{1}{z}\right)^4$ είναι πραγματικός.

Μονάδες 6

Β3. $\left(\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}\right)(z_1+z_2)\leq 4$ όπου z_1, z_2 δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z .

Μονάδες 6

Β4. Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών u, για τους οποίους ισχύει $u-ui=\dfrac{i}{w}-w$, $w\neq 0$ ανήκουν στην υπερβολή $x^2-y^2=1$

Μονάδες 6