Ασκήσεις στο εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων.

(1) Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με $\vec{AB} = 3\vec{\alpha} - 4\vec{\beta}$ και $\vec{A\Gamma} = 12\vec{\alpha} - 5\vec{\beta}$, όπου $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ γνωστά μοναδιαία διανύσματα κάθετα μεταξύ τους.

Α) Να εκφραστεί το διάνυσμα $\vec{B\Gamma}$ ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και να υπολογιστούν τα μήκη των πλευρών του τριγώνου.

Β) Να εκφραστεί η διάμεσος $\vec{AM}$ ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και να υπολογιστεί το μήκος της.

(2) Αν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι μη μηδενικά διανύσματα να αποδειχθεί ότι η δευτεροβάθμια εξίσωση: $(1+\vec{\alpha}^2)x^2 - 2\left|\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right|x + (1+\vec{\beta}^2) = 0$ δεν έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

(3) Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ ισχύουν $2|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 4$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = \frac{\pi}{3}$ να βρεθούν:

α) το $\left|\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}\right|$ και

β) η γωνία $(\widehat{\vec{\alpha}+2\vec{\beta}, 3\vec{\alpha}+\vec{\beta}})$.

(4) Αν τα διανύσματα του χώρου $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ είναι ανά δύο κάθετα και έχουν μέτρα $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 5$, $|\vec{\gamma}| = \sqrt{2}$ να βρεθεί το μέτρο του διανύσματος $\vec{\delta} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta} + \vec{\gamma}$

(5) Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ είναι μοναδιαία και ικανοποιούν τη σχέση $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ να αποδειχθεί ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \vec{\beta}\cdot\vec{\gamma} + \vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma} = -\frac{3}{2}$.

(6) Αν για τα διανύσματα του χώρου $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ ισχύουν $\vec{\gamma} \perp \vec{\alpha}$, $\vec{\gamma} \perp \vec{\beta}$, $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| = 1$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = \frac{\pi}{3}$ να βρεθεί η γωνία $(\widehat{\vec{\alpha}+\vec{\beta}, \vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}})$.

(7) Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$ σχηματίζουν γωνία $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})$ με $0 < (\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) < \frac{\pi}{2}$ και $(\vec{\alpha}+2\vec{\beta}) \perp (5\vec{\alpha}-4\vec{\beta})$ να αναλυθεί το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ σε δυο συνιστώσες παράλληλες προς τα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ αντίστοιχα, αν γνωρίζουμε ότι $|\vec{\gamma}| = 3$ και $(\widehat{\vec{\gamma},\vec{\alpha}}) = \frac{\pi}{3}$.

(8) Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα και ισχύει: $\left[(-\vec{\alpha}\cdot\vec{x}) - 2(\vec{\beta}\cdot\vec{x})\right]\vec{\alpha} + \left[(\vec{\alpha}\cdot\vec{x}) - (\vec{\beta}\cdot\vec{x})\right]\vec{\beta} = \vec{0}$ να υπολογίσετε το $\vec{x}$.

(9) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ μέτρου 1 με $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = \frac{\pi}{3}$. Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός x ώστε το διάνυσμα $\vec{\delta} = \vec{\alpha} + x\vec{\beta}$ να έχει ελάχιστο μέτρο. Για αυτή την τιμή του x να αποδειχθεί ότι τα διανύσματα $\vec{\delta}$ και $\vec{\beta}$ είναι κάθετα.

(10) Έστω $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ δυο μοναδιαία και μη συγγραμμικά διανύσματα και $\vec{u}$ ένα διάνυσμα κάθετο στο διάνυσμα $\vec{u}_1 + \vec{u}_2$. Δείξτε ότι $(\widehat{\vec{u},\vec{u}_2}) + (\vec{u},\vec{u}_2) = ®$.

(11) Αποδείξτε τις ισοδυναμίες:

α) $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}| \Leftrightarrow \vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$

β) $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| = \left||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|\right| \Leftrightarrow \vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$

(12) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$. Αν $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 2$, $|\vec{\gamma}| = 5$ και $2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} - \vec{\gamma} = \vec{0}$ να βρείτε το $|\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}|$

(13) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ με $|\vec{u}_1| = 4$. Αν τα διανύσματα $\alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2$, $\beta\vec{u}_1 - \alpha\vec{u}_2$ είναι κάθετα για κάθε α, β $\in R$ να βρείτε το $|\vec{u}_2|$ και το $|\vec{u}_2 + 3\vec{u}_2|$.

(14) Δίνονται τα διανύσματα του χώρου $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ που σχηματίζουν, ανά δύο, γωνία $\frac{\pi}{3}$ και είναι μοναδιαία. Να βρείτε τα διανύσματα $\vec{x}$ που ανήκουν στο επίπεδο των $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ και είναι κάθετα στο $\vec{\alpha}$.

(15) Σε ορθοκανονικό σύστημα δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ με $|\vec{\alpha}| = 3$, $|\vec{\beta}| = 4$, $|\vec{\gamma}| = 5$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\gamma}}) = \frac{\pi}{3}$, $(\widehat{\vec{\gamma},\vec{\beta}}) = \frac{\pi}{6}$. Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ σε δυο συνιστώσες κατά τις διευθύνσεις των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$.

(16) α) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $\vec{\beta} \neq \vec{0}$. Δείξτε ότι $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta} = \frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|^2}\cdot\vec{\alpha}$.

β) Αν $\vec{\alpha} = (4, -3)$, $\vec{\beta} = (1, 3)$ να δειχθεί ότι $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}(\vec{\alpha}+\vec{\beta}) = \frac{20}{25}\cdot\vec{\alpha}$.

(17) Έστω τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$. Αν τα διανύσματα $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}$, $\vec{\delta} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$ σχηματίζουν γωνία $2\pi/3$ να βρείτε την γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$.

(18) Τα κάθετα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ έχουν μέτρα 3 και 4 αντίστοιχα. Να βρεθεί διάνυσμα $\vec{\gamma}$ με μέτρο 1 που να διχοτομεί την γωνία των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$.

(19) Αν τα μοναδιαία και συνεπίπεδα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ επαληθεύουν την σχέση $(\vec{\alpha}+\vec{\gamma})(\vec{\beta}+\vec{\gamma}) = 0$ δείξτε ότι δύο από αυτά είναι αντίθετα.

(20) Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ είναι μοναδιαία και $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \vec{\beta}\cdot\vec{\gamma} = -2$ τότε $\vec{\alpha} - \vec{\gamma} = \vec{0}$.

(21) Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Αν $\vec{\Gamma E} \perp \vec{AB}$ και $\vec{\Gamma Z} \perp \vec{B\Delta}$ να δείξετε ότι: $\vec{BZ}\cdot\vec{B\Delta} - \vec{BE}\cdot\vec{BA} = \vec{B\Gamma}^2$.

(22) α) Να αποδείξετε ότι $|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$.

β) Αν x, y πραγματικοί αριθμοί με $x^2 + y^2 = 100$ να βρείτε το μέγιστο και το ελάχιστο της παράστασης $A = -3x + 4y$.

(23) Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ είναι μοναδιαία και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = \frac{\pi}{3}$, $(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}}) = \frac{\pi}{4}$ να λυθεί η εξίσωση $\left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}+\vec{\gamma}\right| = \left|\vec{\alpha}+x\vec{\beta}+\vec{\gamma}\right|$ όπου x πραγματικός αριθμός.

(24) Να λυθεί η εξίσωση $\vec{x}+(\vec{x}\cdot\vec{\alpha})\vec{\beta} = \vec{\gamma}$ όπου $\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha} \neq 0$.

(25) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-3, 4)$, $\vec{\beta} = (2, -5)$. Να βρείτε διάνυσμα $\vec{x}$ τέτοιο ώστε $\vec{x}\cdot\vec{\alpha} = 5$ και $\vec{x}\cdot\vec{\beta} = -8$.

(26) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \left(x^2+y^2, 1\right)$, $\vec{\beta} = \left(1, 2x-4y+5\right)$ να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x, y αν $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$.

(27) Αν $\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right| = \left|\vec{\alpha}\right| = \left|\vec{\beta}\right|$ δείξτε ότι $\left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right| = \left|\vec{\alpha}\right|\sqrt{3}$.

(28) Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $\vec{AB} = \vec{\alpha}$ και $\vec{A\Gamma} = \vec{\beta}$. Αν Ε είναι το εμβαδόν του να αποδείξετε ότι Ε = $\frac{1}{2}\sqrt{(|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|)^2 - (\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})^2}$.

(29) Θεωρούμε τα σημεία Α, Β ενός επιπέδου (π).

α) Αν Ρ είναι ένα σημείο του (π) τέτοιο ώστε $2\vec{PA}+\vec{PB} = \vec{0}$ να δειχθεί ότι $\vec{AP} = \frac{1}{3}\vec{AB}$.

β) Να δειχθεί ότι η παράσταση $2\vec{MA}^2 + \vec{MB}^2 - 3\vec{MP}^2$ είναι ανεξάρτητη του σημείου Μ.

(30) Θεωρούμε τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν: $|\vec{\gamma}| = |\vec{\beta}| = \frac{1}{\sqrt{3}-1}|\vec{\alpha}|$ και $(\sqrt{3}+1)\,\vec{\alpha} - \sqrt{3}\,\vec{\beta} = \vec{\gamma}$.

Να υπολογιστούν οι γωνίες $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ και $(\vec{\beta}, \vec{\gamma})$.