

Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα «Ο Αρχιμήδης» Θέματα Μεγάλων Τάξεων 1999-2009

Επιμέλεια: Αλέξανδρος Συγκελάκης
(Για το www.mathematica.gr)

1999-2000

Θέμα 1^ο.

Θεωρούμε ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = \alpha$, $A\Delta = \beta$. Ευθεία ε που περνάει από το κέντρο O του ορθογωνίου τέμνει τη πλευρά $A\Delta$ στο σημείο E , έτσι ώστε $\frac{AE}{E\Delta} = \frac{1}{2}$.

Αν το M είναι τυχαίο σημείο της ευθείας ε στο εσωτερικό του ορθογωνίου, να βρεθεί η αναγκαία και ικανή συνθήκη μεταξύ των α και β , έτσι ώστε οι αποστάσεις του M από τις πλευρές $A\Delta$, AB , $\Delta\Gamma$ και $B\Gamma$, με τη σειρά που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

Θέμα 2^ο.

Να προσδιορίσετε το πρώτο αριθμό ρ , αν ο αριθμός $1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \rho^4$ είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου.

Θέμα 3^ο.

Να βρεθεί ο μέγιστος θετικός πραγματικός αριθμός κ , για τον οποίο ισχύει:

$$\frac{xy}{\sqrt{(x^2 + y^2)(3x^2 + y^2)}} \leq \frac{1}{\kappa}$$

για όλους τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς x , y .

Θέμα 4^ο.

Για τα υποσύνολα $A_1, A_2, \dots, A_{2000}$ του συνόλου M , ισχύει ότι $|A_i| > \frac{2}{3}|M|$, για κάθε $i = 1, 2, \dots, 2000$, όπου με $|X|$ συμβολίζουμε το πλήθος των στοιχείων του συνόλου X .

Να αποδείξετε ότι υπάρχει στοιχείο a του M το οποίο ανήκει τουλάχιστον σε 1334 από τα υποσύνολα A_i .

2000-2001

Θέμα 1^ο.

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R . Οι $B\Delta$, ΓE είναι οι διχοτόμοι των γωνιών B και Γ και η ΔE τέμνει το τόξο AB , που δεν περιέχει το Γ , στο σημείο K . Αν είναι $KA_1 \perp B\Gamma$, $KB_1 \perp A\Gamma$, $KG_1 \perp AB$ και το σημείο Δ απέχει από τις πλευρές BA και $B\Gamma$ απόσταση ίση με x , ενώ το E απέχει από τις πλευρές ΓA , $B\Gamma$ απόσταση ίση με y , τότε:

- i. να εκφράσετε τα μήκη των τμημάτων KA_1 , KB_1 , KG_1 συναρτήσει των x , y και του λόγου

$$\lambda = \frac{KA}{EA}$$

- ii. να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{KB} = \frac{1}{KA} + \frac{1}{KG}$.

Θέμα 2^ο.

Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν θετικοί ακέραιοι α, β τέτοιοι ώστε το γινόμενο $(15\alpha + \beta) \cdot (\alpha + 15\beta)$ να είναι μία δύναμη με βάση το 3 και εκθέτη ακέραιο.

Θέμα 3^ο.

Έστω $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μία συνάρτηση τέτοια ώστε $f(1) = 3$ και

$$f(m+n) + f(m-n) - m + n - 1 = \frac{f(2m) + f(2n)}{2},$$

για όλους τους μη αρνητικούς ακέραιους m, n με $m \geq n$.

Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f .

Θέμα 4^ο.

Στο πίνακα είναι γραμμένοι όλοι οι ακέραιοι αριθμοί από 1 έως 500.

Δύο μαθητές A και B παίζουν το εξής παιχνίδι:

Με τη σειρά ο ένας μετά τον άλλον διαγράφουν από έναν αριθμό. Το παιχνίδι τελειώνει όταν στον πίνακα απομείνουν δύο αριθμοί. Νικητής είναι ο B , αν το άθροισμα των αριθμών που απομένουν διαιρείται με το 3, διαφορετικά νικητής είναι ο A .

Αν ο A αρχίζει πρώτος, έχει ο μαθητής B στρατηγική νίκης;

2001-2002

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Για τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ με $\beta\gamma \neq 0$ ισχύει ότι $\frac{1-\gamma^2}{\beta\gamma} \geq 0$.

Να αποδείξετε ότι

$$10(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma^3) \geq 2\alpha\beta + 5\alpha\gamma.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Ένας φοιτητής του Ε. Μ. Πολυτεχνείου διάβαζε το περασμένο καλοκαίρι για τις επαναληπτικές εξετάσεις ενός μαθήματος επί 37 μέρες, σύμφωνα με τους εξής κανόνες :

- (i) Κάθε μέρα διάβαζε μία τουλάχιστον ώρα.
- (ii) Κάθε μέρα διάβαζε ακέραιο αριθμό ωρών, χωρίς να ξεπερνάει τις 12 ώρες.
- (iii) Συνολικά έπρεπε να διαβάσει το πολύ 60 ώρες.

Να αποδείξετε ότι υπήρξαν κάποιες διαδοχικές μέρες, κατά τη διάρκεια των οποίων διάβασε συνολικά 13 ώρες.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{\Gamma} > 10^\circ$ και $\hat{B} = \hat{\Gamma} + 10^\circ$. Θεωρούμε σημείο E της πλευράς AB , έτσι ώστε $\hat{A}\hat{\Gamma}E = 10^\circ$, και σημείο Δ της πλευράς $A\Gamma$, έτσι ώστε $\hat{\Delta}BA = 15^\circ$. Έστω $Z \neq A$ είναι σημείο τομής των περιγεγραμμένων κύκλων των τριγώνων $AB\Delta$ και $A\Gamma E$.

Να αποδείξετε ότι

$$\hat{Z}BA > \hat{Z}\hat{\Gamma}A$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

- (α) Για τους μη μηδενικούς φυσικούς αριθμούς p, q, r, a ισχύει ότι $pq = ra^2$, όπου ο r είναι πρώτος και οι p, q είναι πρώτοι μεταξύ τους, δηλαδή $(p, q) = 1$.
Να αποδείξετε ότι ένας από τους αριθμούς p, q είναι τέλειο τετράγωνο φυσικού αριθμού.
- (β) Να εξετάσετε αν υπάρχει πρώτος φυσικός αριθμός p , που είναι τέτοιος ώστε ο αριθμός $p(2^{p+1} - 1)$ να είναι τέλειο τετράγωνο φυσικού αριθμού.

2002-2003

1. Αν a, b, c, d είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί και

$$a^3 + b^3 + 3ab = c + d = 1,$$

να αποδείξετε ότι

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^3 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^3 + \left(c + \frac{1}{c}\right)^3 + \left(d + \frac{1}{d}\right)^3 \geq 40$$

2. Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$x^2 + y^2 - z(x + y) = 2$$

$$y^2 + z^2 - x(y + z) = 4$$

$$z^2 + x^2 - y(z + x) = 8$$

3. Δίνεται κύκλος C κέντρου K και ακτίνας r , σημείο A πάνω στο κύκλο και σημείο P στο εξωτερικό του κύκλου C . Από το σημείο P θεωρούμε μεταβλητή ευθεία ε η οποία τέμνει τον κύκλο C στα B και Γ . Αν H είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$, να αποδειχθεί ότι υπάρχει μοναδικό σημείο T του επιπέδου του κύκλου C τέτοιο ώστε το άθροισμα

$$HA^2 + HT^2$$

να είναι σταθερό (ανεξάρτητα από τη θέση της ευθείας ε).

4. Στο σύνολο Σ των σημείων ενός επιπέδου Π ορίζουμε μία πράξη $*$, δηλαδή μία απεικόνιση της μορφής

$$* : \Sigma \times \Sigma \rightarrow \Sigma$$

η οποία απεικονίζει κάθε διατεταγμένο ζεύγος σημείων (X, Y) στο σημείο

$$X * Y = Z,$$

που είναι το συμμετρικό του X ως προς κέντρο συμμετρίας το Y .

Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ στο επίπεδο Π . Είναι δυνατόν με διαδοχικές εφαρμογές της πράξης $*$ στο σύνολο των τριών κορυφών $\{A, B, \Gamma\}$ να λάβουμε την τέταρτη κορυφή Δ ; Δεν εξετάζονται οι πράξεις με σημεία που δεν ανήκουν στους άξονες x και y .

2003-2004

1. Να βρεθεί η μεγαλύτερη δυνατή τιμή του θετικού πραγματικού αριθμού M για την οποία αληθεύει η ανισότητα

$$x^4 + y^4 + z^4 + xyz(x + y + z) \geq M(xy + yz + zx)^2,$$

για κάθε $x, y, z \in \mathbb{R}$.

2. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν θετικοί ακέραιοι αριθμοί x_1, x_2, \dots, x_m , όπου $m \geq 2$, τέτοιοι ώστε

$$x_1 < x_2 < \dots < x_m \quad \text{και} \quad \frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} + \dots + \frac{1}{x_m^3} = 1.$$

3. Δίνεται κύκλος (O, ρ) και σημείο A εκτός αυτού. Από το σημείο A φέρουμε ευθεία ε , διαφορετική της ευθείας AO , που τέμνει τον κύκλο στα σημεία B και Γ , με το B μεταξύ των A και Γ . Στη συνέχεια φέρουμε τη συμμετρική ευθεία της ε , ως προς άξονα συμμετρίας την ευθεία AO , η οποία τέμνει τον κύκλο στα σημεία E και Δ , με το E μεταξύ των A και Δ .

Να αποδείξετε ότι οι διαγώνιοι του τετραπλεύρου $B\Gamma\Delta E$ διέρχονται από σταθερό σημείο, δηλαδή τέμνονται στο ίδιο πάντοτε σημείο ανεξάρτητα από τη θέση της ευθείας ε .

4. Έστω M ένα υποσύνολο του συνόλου των φυσικών αριθμών με 2004 στοιχεία. Αν γνωρίζουμε ότι δεν υπάρχει στοιχείο του συνόλου M το οποίο να ισούται με το άθροισμα δύο διαφορετικών στοιχείων του M , να προσδιορίσετε

την ελάχιστη τιμή την οποία μπορεί να πάρει το μεγαλύτερο από τα στοιχεία του M

2004-2005

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Να προσδιορίσετε πολυώνυμο $P(x)$ με πραγματικούς συντελεστές τέτοιο ώστε $P(2)=12$ και $P(x^2)=x^2(x^2+1)P(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Δίνεται η ακολουθία $(\alpha_n), n \in \mathbb{N}^*$ με $\alpha_1=1$ και $\alpha_n = \alpha_{n-1} + \frac{1}{n^3}, n=2,3,\dots$

(i) Να αποδείξετε ότι $\alpha_n < \frac{5}{4}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

(ii) Αν ε είναι δεδομένος θετικός πραγματικός αριθμός, να προσδιορίσετε τον ελάχιστο φυσικό αριθμό $n_0 > 0$ που είναι τέτοιος ώστε, για κάθε $n > n_0$, να ισχύει

$$|\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \varepsilon$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Έστω κυρτή γωνία \hat{xOy} . Εντός αυτής θεωρούμε τις ημιευθείες Ox_1, Oy_1 έτσι ώστε

$\hat{xOx}_1 = \hat{yOy}_1 < \frac{\hat{xOy}}{3}$. Πάνω στις ημιευθείες Ox_1, Oy_1 θεωρούμε σταθερά σημεία

K, Λ , αντίστοιχα, έτσι ώστε $OK = OL$. Αν τα σημεία A και B κινούνται πάνω στις πλευρές Ox και Oy , αντίστοιχα, έτσι ώστε $A \neq O, B \neq O$ και το εμβαδόν του πολυγώνου $OAKLB$ να παραμένει σταθερό, να αποδείξετε ότι οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων OAB διέρχονται από σταθερό σημείο, διαφορετικό του O .

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Δίνεται ότι ο αριθμός k είναι θετικός ακέραιος και ότι η εξίσωση

$$x^3 + y^3 - 2y(x^2 - xy + y^2) = k^2(x - y) \quad (1)$$

έχει μία λύση (x_0, y_0) , με $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}^*$ και $x_0 \neq y_0$. Να αποδείξετε ότι :

(α) η εξίσωση (1) έχει πεπερασμένο πλήθος λύσεων (x, y) με $x, y \in \mathbb{Z}$ και $x \neq y$.

(β) είναι δυνατόν να προσδιορίσουμε 11 επιπλέον διαφορετικές λύσεις (X, Y) της εξίσωσης (1), με $X, Y \in \mathbb{Z}^*$ και $X \neq Y$, όπου οι X, Y είναι συναρτήσεις των x_0, y_0 .

2005-2006

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Πόσοι διαφορετικοί πενταψήφιοι θετικοί ακέραιοι αριθμοί υπάρχουν που το καθένα από τα ψηφία τους, εκτός του τελευταίου, είναι μεγαλύτερο ή ίσο του επομένου ψηφίου τους;

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Έστω n ένα θετικός ακέραιος αριθμός. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση

$$x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3n \text{ δεν έχει λύσεις στο σύνολο των θετικών ρητών αριθμών.}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα σημεία Λ, M, N των πλευρών $B\Gamma$, AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, έτσι ώστε η $A\Lambda$ να είναι διχοτόμος της γωνίας A και οι BN και ΓM να διέρχονται από ένα κοινό σημείο Σ της $A\Lambda$. Αν η γωνία $A\Lambda B$ ισούται με τη γωνία ANM , να αποδείξετε ότι η γωνία MNA είναι ορθή.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Να εξετάσετε αν υπάρχει συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε να ικανοποιεί τις συνθήκες:

- i. $f(x + y + z) \leq 3(xy + yz + zx)$ για όλους τους πραγματικούς αριθμούς x, y, z και
- ii. Υπάρχει φυσικός αριθμός ν και συνάρτηση g τέτοια ώστε $g(g(x)) = x^{2\nu+1}$ και $f(g(x)) = g^2(x)$ για κάθε πραγματικό αριθμό x .

2006-2007

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Να προσδιορίσετε τους φυσικούς αριθμούς ν για τους οποίους ο αριθμός $2007 + 4^\nu$ είναι τέλειο τετράγωνο.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Αν α, β, γ είναι μέτρα πλευρών τριγώνου, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{(\alpha + \gamma - \beta)^4}{\alpha(\alpha + \beta - \gamma)} + \frac{(\alpha + \beta - \gamma)^4}{\beta(\beta + \gamma - \alpha)} + \frac{(\beta + \gamma - \alpha)^4}{\gamma(\alpha + \gamma - \beta)} \geq \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Σε κυκλικό δακτύλιο με ακτίνες R και $R - 2r$, όπου $R = 11r$, τοποθετούμε κύκλους ακτίνας r εφαπτόμενους των κύκλων που ορίζουν το δακτύλιο και ανά δύο μη επι-

καλυπτόμενους. Να προσδιορίσετε το μέγιστο αριθμό των κύκλων που μπορούμε να τοποθετήσουμε μέσα στο δακτύλιο. (Δίνεται ότι: $9,94 < \sqrt{99} < 9,95$)

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Σε κάθε τετράγωνο μιας σκακιέρας 2007×2007 τοποθετούμε έναν από τους αριθμούς 1 ή -1. Συμβολίζουμε με A_i το γινόμενο των αριθμών της i -γραμμής, $i=1,2,\dots,2007$, και με B_j το γινόμενο των αριθμών της j -στήλης, $j=1,2,\dots,2007$. Να αποδείξετε ότι:

$$A_1 + A_2 + \dots + A_{2007} + B_1 + B_2 + \dots + B_{2007} \neq 0.$$

2007-2008

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Έστω $x, y \in (0, 1)$ μεταβλητοί πραγματικοί αριθμοί και θεωρούμε τους αριθμούς $a = x + ym$ και $b = y + xm$ όπου a, b, m θετικοί ακέραιοι. Αν όλα τα ζεύγη ακεραίων που προκύπτουν καθώς τα x, y μεταβάλλονται είναι 119, να βρεθεί ο m .

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Να λυθεί στους ακεραίους η εξίσωση $x^8 + 2^{2^x+2} = p$ όπου p πρώτος αριθμός.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Έστω H το ορθόκентρο τριγώνου $AB\Gamma$ που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο K και ακτίνα $R=1$. Αν Σ είναι η τομή των ευθειών που ορίζουν τα τμήματα HK και $B\Gamma$ και επιπλέον ισχύει $K\Sigma \cdot KH = 1$, να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου $AB\eta\Gamma A$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Αν $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ είναι θετικοί ακέραιοι και k, t είναι ο ελάχιστος και ο μέγιστος από αυτούς αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι

$$\left(\frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n} \right)^{\frac{tn}{k}} \geq \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_n$$

2008-2009

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Να προσδιορίσετε τις τιμές του θετικού ακέραιου n για τις οποίες ο αριθμός

$$A = \sqrt{\frac{9n-1}{n+7}}$$

είναι ρητός.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με περίκεντρο O και A_1, B_1, Γ_1 τα μέσα των πλευρών $B\Gamma$, $A\Gamma$ και AB αντίστοιχα. Θεωρούμε τα σημεία A_2, B_2, Γ_2 έτσι ώστε: $\overline{OA_2} = \lambda \cdot \overline{OA_1}$, $\overline{OB_2} = \lambda \cdot \overline{OB_1}$ και $\overline{O\Gamma_2} = \lambda \cdot \overline{O\Gamma_1}$ με $\lambda > 0$. Αποδείξτε ότι οι ευθείες $AA_2, BB_2, \Gamma\Gamma_2$ συντρέχουν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Αν οι μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί x, y και z έχουν άθροισμα 2, να αποδείξετε ότι:

$$x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2 + xyz \leq 1.$$

Για ποιες τιμές των x, y και z αληθεύει η ισότητα;

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Δίνονται οι διαφορετικοί μεταξύ τους μιγαδικοί αριθμοί $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6$ των οποίων οι εικόνες $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ είναι διαδοχικά σημεία του κύκλου με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα $r > 0$. Αν w είναι μία λύση της εξίσωσης $z^2 + z + 1 = 0$ και ισχύουν οι σχέσεις:

$$z_1 w^2 + z_3 w + z_5 = 0 \quad (\text{I}),$$

$$z_2 w^2 + z_4 w + z_6 = 0 \quad (\text{II})$$

να αποδείξετε ότι:

(α) Το τρίγωνο $A_1 A_3 A_5$ είναι ισόπλευρο,

(β) $|z_1 - z_2| + |z_2 - z_3| + |z_3 - z_4| + |z_4 - z_5| + |z_5 - z_6| + |z_6 - z_1| = 3|z_1 - z_4| = 3|z_2 - z_5| = 3|z_3 - z_6|$.