ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
28^{η} Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα

"Ο Αρχιμήδης"

ΣΑΒΒΑΤΟ, 26 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2011

Ενδεικτικές Λύσεις θεμάτων μικρών τάξεων

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

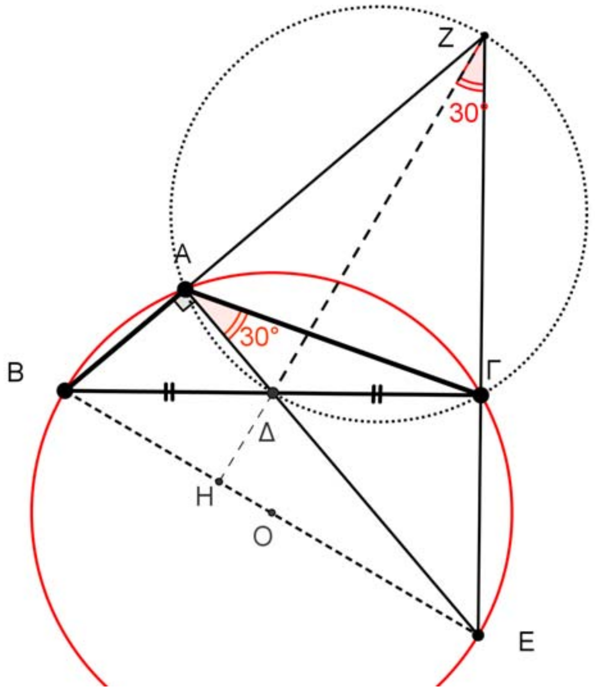
Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με $B\hat{A}\Gamma = 120^\circ$. Αν Δ είναι το μέσον της πλευράς $B\Gamma$, δίνεται ότι η ευθεία $A\Delta$ είναι κάθετη προς την πλευρά AB και τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου $AB\Gamma$ στο σημείο E. Οι ευθείες BA και $E\Gamma$ τέμνονται στο Z. Να αποδείξετε ότι:

(α) $Z\Delta \perp BE$, **(β)** $Z\Delta = B\Gamma$.

Λύση

(α) Επειδή είναι $B\hat{A}E = 90^\circ$ η BE είναι διάμετρος του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ. Επομένως θα είναι και $B\hat{\Gamma}E = 90^\circ$. Έτσι στο τρίγωνο ΖΒΕ τα ευθύγραμμα τμήματα ΕΑ και ΒΓ είναι ύψη του τριγώνου που τέμνονται στο σημείο Δ.

Επομένως η ευθεία ΖΔ είναι η ευθεία του τρίτου ύψους του τριγώνου ΖΒΕ, δηλαδή είναι $Z\Delta \perp BE$.



Σχήμα 1

Διαφορετικά, θα μπορούσαμε να αποδείξουμε ότι: $Z\hat{B}H = 90^\circ$. Πράγματι, έχουμε

$$Z\hat{B}H = 180^\circ - \left(H\hat{B}Z + B\hat{Z}H\right) \qquad (1)$$

Όμως έχουμε

$$H\hat{B}Z = E\hat{B}\Gamma + \Gamma\hat{B}A = E\hat{A}\Gamma + \Gamma\hat{B}A = 120^\circ - 90^\circ + \Gamma\hat{B}A = 30^\circ + \hat{B}. \qquad (2)$$

Επίσης από το εγγράψιμο τετράπλευρο ΑΔΓΖ (γιατί $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{Z} = \Delta\hat{\Gamma}\mathrm{Z} = 90^\circ$) έχουμε ότι:

$$\mathrm{B}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{H} = \mathrm{A}\hat{\mathrm{Z}}\Delta = \hat{\Gamma} \qquad (3)$$

Λόγω των (2) και (3) η σχέση (1) γίνεται:

$$\mathrm{Z}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{H} = 180^\circ - \left(30^\circ + \hat{\mathrm{B}} + \hat{\Gamma}\right) = 150^\circ - \left(\hat{\mathrm{B}} + \hat{\Gamma}\right) = 150^\circ - \left(180^\circ - 120^\circ\right) = 90^\circ .$$

(β) Παρατηρούμε ότι το τετράπλευρο ΑΔΓΖ είναι εγγράψιμο, αφού $\Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{Z} + \Delta\hat{\Gamma}\mathrm{Z} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$. Άρα θα έχουμε $\Delta\hat{\mathrm{Z}}\Gamma = \Delta\hat{\mathrm{A}}\Gamma = \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma - \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Delta = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$.

Επομένως στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta\Gamma\mathrm{Z}$ η υποτείνουσα ΖΔ θα είναι διπλάσια της κάθετης πλευράς ΔΓ, δηλαδή $\mathrm{Z}\Delta = 2 \cdot \Delta\Gamma = \mathrm{B}\Gamma$, αφού Δ μέσο της πλευράς ΒΓ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Θεωρούμε το σύνολο των τετραψήφιων θετικών ακέραιων αριθμών $x = \overline{\alpha\beta\gamma\delta}$ των οποίων όλα τα ψηφία είναι διαφορετικά από το μηδέν και διαφορετικά μεταξύ τους. Θεωρούμε επίσης τους αριθμούς $y = \overline{\delta\gamma\beta\alpha}$ και υποθέτουμε $x > y$. Βρείτε τη μεγαλύτερη και τη μικρότερη τιμή της διαφοράς $x - y$, καθώς και τους αντίστοιχους τετραψήφιους ακέραιους x, y για τις οποίες λαμβάνονται αυτές οι τιμές.

Λύση

Θεωρούμε τη δεκαδική αναπαράσταση των αριθμών :

$$\begin{aligned} x - y &= 1000\alpha + 100\beta + 10\gamma + \delta - 1000\delta - 100\gamma - 10\beta - \alpha \\ &= 1000(\alpha - \delta) + 100(\beta - \gamma) + 10(\gamma - \beta) + \delta - \alpha \\ &= 999(\alpha - \delta) + 90(\beta - \gamma) \\ &= 9\left(111(\alpha - \delta) + 10(\beta - \gamma)\right). \end{aligned}$$

Αρκεί να προσδιορίσουμε τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A} = 111(\alpha - \delta) + 10(\beta - \gamma).$$

Οι αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ είναι θετικοί μονοψήφιοι ακέραιοι (διαφορετικοί μεταξύ τους). Εφόσον $x > y$, θα ισχύει $\alpha > \delta$.

Η παράσταση Α γίνεται μέγιστη, όταν οι αριθμοί $\alpha - \delta$ και $\beta - \gamma$ γίνουν μέγιστοι και επί πλέον $\alpha - \delta > \beta - \gamma$. Η διαφορά $\alpha - \delta$ γίνεται μέγιστη όταν $\alpha = 9$ και $\delta = 1$. Η διαφορά $\beta - \gamma$ γίνεται μέγιστη όταν $\beta = 8$ και $\gamma = 2$.

Άρα $x = 9821$ και $y = 1289$ είναι οι ζητούμενοι ακέραιοι οι οποίοι δημιουργούν τη μεγαλύτερη διαφορά $x - y = 9821 - 1289 = 8532$.

Η παράσταση Α γίνεται ελάχιστη, όταν οι αριθμοί $\alpha - \delta$ και $\beta - \gamma$ γίνουν ελάχιστοι.

Η ελάχιστη τιμή της διαφοράς $\alpha - \delta$ είναι το 1. Άρα οι δυνατές τιμές του ζεύγους (α, δ) είναι:

$$(9,8), (8,7), (7,6)\ (6,5)\ (5,4)\ (4,3)\ (3,2) \text{ και } (2,1).$$

Για όλες τις παραπάνω δυνατές τιμές του ζεύγους (α, δ), η τιμή της παράστασης A γίνεται:

$$\mathrm{A} = 111 + 10(\beta - \gamma).$$

Η ελάχιστη τιμή τώρα της διαφοράς $\beta - \gamma$ είναι το -8 που δημιουργείται για $\beta = 1$ και $\gamma = 9$.

Απορρίπτοντας τέλος τα ζεύγη (9,8) και (2,1) (διότι τα ψηφία του τετραψήφιου αριθμού είναι διαφορετικά μεταξύ τους), καταλήγουμε στον παρακάτω πίνακα δυνατών τιμών των αριθμών x,y καθώς και την ελάχιστη διαφορά.

3192	2913	279
4193	3914	279
5194	4915	279
6195	5916	279
7196	6917	279
8197	7918	279

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Αν ο αριθμός $3\nu+1$, όπου ν ακέραιος, είναι πολλαπλάσιο του 7, να βρείτε τα δυνατά υπόλοιπα της διαίρεσης:

(α) του ν με το 7,

(β) του ν^m με το 7, για τις διάφορες τιμές του θετικού ακέραιου m, $m>1$.

Λύση

(α) Έστω $3\nu+1=7\kappa$, όπου ν,κ ακέραιοι. Ο ακέραιος ν έχει τη μορφή $\nu=7\rho+\upsilon$, όπου $\upsilon\in\{0,1,2,3,4,5,6\}$ και ρ ακέραιος. Τότε έχουμε:

$$3(7\rho+\upsilon)+1=7\kappa \Leftrightarrow 21\rho+3\upsilon+1=7\kappa \Leftrightarrow 3\upsilon+1=\text{πολλαπλάσιο του } 7,$$

οπότε η μόνη δυνατή τιμή για το υ είναι το 2. Έτσι έχουμε $\nu=7\rho+2$, όπου ρ ακέραιος, οπότε το μοναδικό δυνατό υπόλοιπο της διαίρεσης του ν με το 7 είναι το 2.

(β) Έχουμε

$$\nu^m=(7\rho+2)^m=\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}(7\rho)^{m-i}\,2^i=\pi o\lambda.7+2^m.$$

Επομένως, αρκεί να βρούμε τα δυνατά υπόλοιπα της διαίρεσης του 2^m με το 7.

Αν υποθέσουμε ότι $m=3\sigma+\upsilon$, όπου $\upsilon\in\{0,1,2\}$, τότε λαμβάνουμε:

$$2^m=2^{3\sigma+\upsilon}=8^\sigma\cdot 2^\upsilon=(7+1)^\sigma\cdot 2^\upsilon=(\pi o\lambda.7+1)\cdot 2^\upsilon=\pi o\lambda.7+2^\upsilon,$$

όπου $\upsilon\in\{0,1,2\}$. Άρα τα δυνατά υπόλοιπα της διαίρεσης του ν^m με το 7, για τις διάφορες τιμές του θετικού ακέραιου m, $m>1$ είναι τα $2^0=1,\ 2^1=2$ και $2^2=4$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Αν x,y,z είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί με άθροισμα 12, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+3\geq\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}.$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

Λύση

Επειδή οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί x,y,z έχουν άθροισμα 12, αρκεί να αποδείξουμε την ανισότητα

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{x+y+z}{4}\geq\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}. \qquad (1)$$

Επειδή οι πραγματικοί αριθμοί x, y, z είναι θετικοί, από την ανισότητα αριθμητικού – γεωμετρικού μέσου έχουμε

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{4}\geq 2\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{4}}=\sqrt{x}\,, \tag{2}$$

$$\frac{y}{z}+\frac{z}{4}\geq 2\sqrt{\frac{y}{z}\cdot\frac{z}{4}}=\sqrt{y}\,, \tag{3}$$

$$\frac{z}{x}+\frac{x}{4}\geq 2\sqrt{\frac{z}{x}\cdot\frac{x}{4}}=\sqrt{z}\ . \tag{4}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (2), (3) και (4) προκύπτει η ανισότητα (1).

Η ισότητα ισχύει, όταν οι ανισότητες (2), (3) και (4) αληθεύουν και οι τρεις ως ισότητες., δηλαδή όταν

$$\frac{x}{y}=\frac{y}{4},\ \frac{y}{z}=\frac{z}{4},\ \frac{z}{x}=\frac{x}{4}\Leftrightarrow x=\frac{y^2}{4},\ y=\frac{z^2}{4},\ z=\frac{x^2}{4}\Leftrightarrow x=\frac{y^2}{4},\ y=\frac{z^2}{4},\ z=\frac{1}{4}\left(\frac{y^2}{4}\right)^2=\frac{y^4}{4^3}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{y^2}{4},\ y=\frac{z^2}{4},\ z=\frac{1}{4^3}\left(\frac{z^2}{4}\right)^4$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{y^2}{4},\ y=\frac{z^2}{4},\ z=\frac{1}{4^7}z^8$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{y^2}{4},\ y=\frac{z^2}{4},\ z^7=4^7\Leftrightarrow x=y=z=4.$$