<u>Εισαγωγή στην ανάλυση</u>

<u>Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ</u>

1. Έστω A ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και $A \neq \varnothing$. Τι ονομάζεται πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A ;

<u>Απάντηση</u>

Πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A , ονομάζουμε μια διαδικασία f με την οποία σε κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y .

- Το y ονομάζεται **τιμή** της f στο x και συμβολίζεται με $f(x)$.
- Για να εκφράσουμε την διαδικασία αυτή ,γράφουμε : $f : A \to \mathbb{R}$
- Το γράμμα x ,που παριστάνει οποιοδήποτε στοιχείο του A λέγεται **ανεξάρτητη μεταβλητή** ,ενώ το y λέγεται **εξαρτημένη μεταβλητή** .
- Το πεδίο ορισμού A της f συμβολίζεται και με D_f
- Το σύνολο που έχει για στοιχεία τις τιμές της f σε όλα τα $x \in A$,λέγεται

σύνολο τιμών της f και συμβολίζεται με **f(A)** .Είναι δηλαδή :

$f(A) = \{y \in \mathbb{R} \,/\, y = f(x) \,,\, x \in A\}$.

<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ</u>

1. Μια συνάρτηση ορίζεται όταν δοθούν :

<u>το πεδίο ορισμού και η τιμή της f(x) για κάθε $x \in A$</u> .Αν σε μια συνάρτηση δοθεί ο τύπος της τότε θα θεωρούμε πεδίο ορισμού το σύνολο των πραγματικών αριθμών x , ώστε η
$f(x)$ να είναι πραγματικός αριθμός.

2. Γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f , λέγεται το σύνολο των σημείων $M(x,y)$ για τα οποία ισχύει $y = f(x)$.Συνήθως την συμβολίζουμε με C_f οπότε:

$C_f = \{(x,y) \,/\, y = f(x), x \in A\}$

3. Όταν δίνεται $f : A \to \mathbb{R}$ δεν έπεται ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$.

Α. ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ

1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{x}{x^2-5x+6}$

Λύση:
Πρέπει
$x^2-5x+6\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 2$ και $x\neq 3$
άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $A=R-\{2,3\}$

ΓΕΝΙΚΑ:
Αν $f(x)=\dfrac{A(x)}{\Pi(x)}$ **το πεδίο ορισμού είναι το** $A=\{x\in R / \Pi(x)\neq 0\}$

2. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4x-12}}$

Λύση:
Πρέπει
$x^2-4x-12>0 \Leftrightarrow (x-6)(x+2)>0 \Leftrightarrow x<-2$ ή $x>6$
Επομένως το πεδίο ορισμού είναι το σύνολο $A=(-\infty,-2)\cup(6,+\infty)$

ΓΕΝΙΚΑ:
Αν $f(x)=\sqrt[v]{A(x)}$ **το πεδίο ορισμού είναι το** $A=\{x\in R / A(x)\geq 0\}$

3. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\ln\dfrac{x+2}{x-1}$

Λύση:
Πρέπει
$\dfrac{x+2}{x-1}>0 \Leftrightarrow (x-1)(x+2)>0 \Leftrightarrow x<-2$ ή $x>1$
Οπότε το πεδίο ορισμού είναι $A=(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$

ΓΕΝΙΚΑ:
Αν $f(x)=\ln A(x)$ **το πεδίο ορισμού είναι το** $A=\{x\in R / A(x)>0\}$

4. Σε ποιο διάστημα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f, όπου $f(x)=\ln(x\ -3)$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$;

Λύση:
Πρέπει
$f(x)<0 \Leftrightarrow \ln(x-3)<0 \Leftrightarrow \ln(x-3)<\ln 1 \Leftrightarrow 0<x-3<1 \Leftrightarrow 3<x<4$
δηλαδή στο διάστημα $(3,4)$ η C_f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$

<u>ΓΕΝΙΚΑ</u> :
Α) Για να βρούμε σε ποια διαστήματα ή σε ποιο διάστημα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον $x'x$, λύνουμε την ανίσωση f(x)>0
Β)) Για να βρούμε σε ποια διαστήματα ή σε ποιο διάστημα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από τον $x'x$, λύνουμε την ανίσωση f(x)<0 .
Γ) Για να βρούμε σε ποια σημεία η γραφική παράσταση της f τέμνει τον $x'x$ λύνουμε την εξίσωση f(x)=0 .
Δ) Για να βρούμε πότε η C_f είναι πάνω από την C_g λύνουμε την ανίσωση
f(x)> g(x)
Ε) Για να βρούμε τα σημεία τομής των C_f και C_g λύνουμε το σύστημα

$$\begin{matrix} y = f(x) \\ y = g(x) \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} f(x) = g(x) \quad (1) \\ y = g(x) \end{matrix}$$

και από την (1) βρίσκουμε τις συντεταγμένες των σημείων τομής.

<u>ΓΕΝΙΚΑ</u> :
Η συνάρτηση f(x)=lnx ορίζεται όταν x>0 ενώ η f(x)=e^x ορίζεται στο R

<u>Συνοψίζοντας από τα παραπάνω για το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης υπενθυμίζουμε τα εξής</u> :

Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις ορίζονται στο R
Α)Οι ρητές συναρτήσεις ορίζονται στο R εκτός από τις τιμές της μεταβλητής που μηδενίζουν τον παρανομαστή.
Β)Όταν ο τύπος μιας συνάρτησης έχει ριζικό πρέπει το υπόρριζο να είναι θετική ποσότητα ή μηδέν.
Γ)Οι εκθετικές συναρτήσεις ορίζονται στο R
Δ)Οι λογαριθμικές συναρτήσεις ορίζονται για θετικές ποσότητες.
Ε)Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις $f_1(x) = \eta\mu x$, $f_2(x) = \sigma\upsilon\nu x$ **ορίζονται στο R. Ενώ οι συναρτήσεις** $f_3(x) = \varepsilon\varphi x$, $f_4(x) = \sigma\varphi x$ **ορίζονται στο R εκτός από τα x εκείνα για τα οποία ισχύει συνx=0 και ημx=0 αντίστοιχα.**

<u>Ασκήσεις</u>

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων

α) $f(x) = \ell n(x-2) - \ell n(6x - x^2)$ β) $g(x) = \dfrac{1 + \ell nx}{\ell n^2 x - \ell nx - 2}$

2. Αν $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$, $x \in R$ να δείξετε ότι : $\ln[f(x) + f(-x)] = 0$, $x \in R$

3. Να βρείτε τα α,β και σημεία τομής της συνάρτησης $f(x)=\alpha+\beta\ell nx$ με τους άξονες δεδομένου ότι η C_f περνά από τα σημεία $(1,1)$ και $(e,2)$.

4. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων

α. $f(x)=\dfrac{x+1}{3x-6x^2}$ β. $f(x)=\dfrac{x}{e^x-1}$ γ. $f(x)=\sqrt{x^2-5x+6}$

δ. $f(x)=\ell n\dfrac{x-1}{x}$

ε. $f(x)=\dfrac{x}{\ell n^2x-\ell nx}$ στ. $f(x)=\ell n\left(e^x-2\right)$ z. $f(x)=\sqrt{2-x-x^2}$

5 . Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων

α) $f(x)=\ell n(x-2)+\ell n(3-x)$ β) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x-8}}$

γ) $f(x)=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{e^x-1}$ δ) $f(x)=\dfrac{3-x}{|x|-2}$

ΙΣΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f:A\to R$ και $g:B\to R$.
Οι f και g λέγονται **ίσες** και γράφουμε $f = g$ αν και μόνο αν $A = B$ και $f(x)=g(x)$ για κάθε $x\in A$.

Παράδειγμα

Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{1+\eta\mu 2x}$ και $g(x)=|\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x|$ είναι ίσες

Λύση

Οι f και g έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A= R .

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$

$$f(x)=\sqrt{\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x+2\eta\mu x\ \sigma\upsilon\nu x}=\sqrt{(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)^2}=|\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x|=g(x)$$

Οι f και g λέγονται ίσες σε ένα σύνολο Ε αν $f(x)=g(x)$ για κάθε $x\in A$.

Παράδειγμα

Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ και $g(x)=x+2$ είναι ίσες.

Αν όχι να βρεθεί το ευρύτερο υποσύνολο του R ώστε να είναι ίσες.

Λύση

Επειδή $A_f=R-\{2\}$ και $A_g=R$ οι συναρτήσεις f και g δεν είναι ίσες.

Περιορίζουμε την $g(x)$ στο σύνολο $E=R-\{2\}$

Επειδή όμως για κάθε $x \neq 2$:

$f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}=x+2=g(x)$ είναι $f=g$ στο σύνολο $E=R-\{2\}$.

Πράξεις συναρτήσεων

Έστω οι συναρτήσεις $f: A \to \mathbb{R}$, $g: B \to \mathbb{R}$. Τότε

Η συνάρτηση

- $f+g$ **ορίζεται με πεδίο ορισμού το** $A \cap B$ **και τύπο** $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$.
- $f-g$ **ορίζεται με πεδίο ορισμού το** $A \cap B$ **και τύπο** $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$.
- $f \cdot g$ **ορίζεται με πεδίο ορισμού το** $A \cap B$ **και τύπο** $(f \cdot g)(x)=f(x) \cdot g(x)$.
- $\dfrac{f}{g}$ **ορίζεται με πεδίο ορισμού το** $A' =$

  $A \cap B-\{x \in \Re \,/\, g(x)=0\}$ **και τύπο** $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

<u>Παράδειγμα</u>

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x-1$ και $g(x)=\sqrt{1\text{-}x^2}$ να οριστεί η συνάρτηση $h=\dfrac{f}{g}$

<u>Λύση</u>

Είναι $A_f=\mathbb{R}$ και $A_g=[-1,1]$. Οπότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης h είναι

$A_h=A_f \cap A_g-\{g(x)=0\}=[-1,1]-\{g(x)=0\}$ (1)

$g(x)=0 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=-1$ οπότε από την (1): $A_h=(-1,1)$

Για κάθε $x \in A_h$ ο τύπος της συνάρτησης h είναι

$h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{x-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Παράδειγμα

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ell n x^2$, $g(x) = \dfrac{1}{e^x - 1}$

i) Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των f και g

ii) Να οριστούν οι συναρτήσεις $f \cdot g$ και g/f

<u>Λύση:</u>

i) Για να ορίζεται η f πρέπει:

$x^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ οπότε η f έχει πεδίο ορισμού το $A = R - \{0\}$

Για να ορίζεται η g πρέπει:

$e^x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow e^x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 0$ συνεπώς το πεδίο ορισμού της g είναι πάλι το $A = R - \{0\}$

ii) Το πεδίο ορισμού της $f \cdot g$ είναι το $A = R - \{0\}$ ενώ ο τύπος της είναι

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \frac{\ell n x^2}{e^x - 1}$$

Η συνάρτηση $\frac{g}{f}$ έχει πεδίο ορισμού το A εκτός από τις ρίζες της εξίσωσης

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \ell n x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

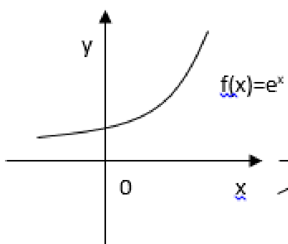
Οπότε το πεδίο ορισμού της $\frac{g}{f}$ είναι το σύνολο $B = R - \{0, \pm 1\}$ ενώ ο τύπος της είναι

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{1}{(e^x - 1)\ell n x^2}$$

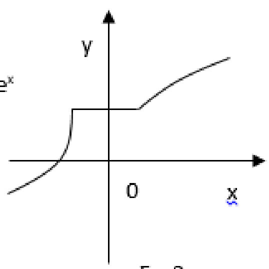
<u>ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ</u>

Έστω μια συνάρτηση $f : A \to R$. Αν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ ισχύει

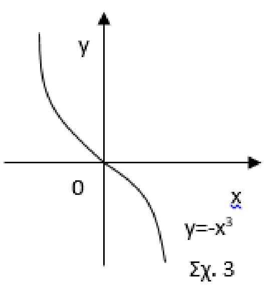
- $f(x_1) < f(x_2)$ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο A (σχ. 1)
- $f(x_1) \leq f(x_2)$ τότε η f είναι αύξουσα στο A (σχ. 2)
- $f(x_1) > f(x_2)$ τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο A (σχ. 3)
- $f(x_1) \geq f(x_2)$ τότε η f είναι φθίνουσα στο A (σχ. 4)



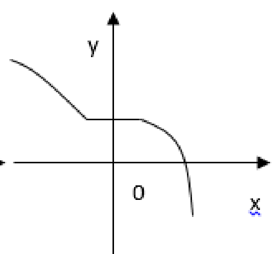
Σχ. 1



Σχ. 2



Σχ. 3



Σχ. 4

Παρατήρηση :

1. Η γραφική παράσταση μιας γνησίως μονότονης συνάρτησης τέμνει τον άξονα x΄x το πολύ σε ένα σημείο ή ισοδύναμα η εξίσωση f(x)=0 έχει το πολύ μια λύση στο πεδίο ορισμού της
2. Αν για $x_1, x_2 \in A$ με $f(x_1) < f(x_2)$ έπεται $x_1 < x_2$, τότε δεν έπεται ότι η f είναι γνησίως αύξουσα .

Παραδείγματα

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x-1) + 2x - 3$. Να μελετηθεί η μονοτονία της .

Λύση

i) Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = (1, +\infty)$

Για κάθε $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$ με

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x_1 - 1 < x_2 - 1 \\ 2x_1 < 2x_2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \ln(x_1 - 1) < \ln(x_2 - 1) \\ 2x_1 - 3 < 2x_2 - 3 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln(x_1 - 1) + 2x_1 - 3 < \ln(x_2 - 1) + 2x_2 - 3 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -2\sqrt{x-1} + 3$. Να μελετηθεί η μονοτονία της.

Λύση

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = [1, +\infty)$

Για κάθε $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$ με

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - 1 < x_2 - 1 \Leftrightarrow -2\sqrt{x_1 - 1} + 3 > -2\sqrt{x_2 - 1} + 3 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Δηλαδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$.

Γενικός τρόπος: Θεωρούμε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ και με επιτρεπτές πράξεις φτάνουμε σε $f(x_1) < f(x_2)$ ή $f(x_1) > f(x_2)$.

3.Να μελετηθεί η μονοτονία της συνάρτησης $f(x) = \ln x + x + 1$ και στη συνέχεια να λυθεί η ανίσωση: $x^2 + \ln x < x$

<u>Λύση</u>

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A=(0,+\infty)$

Για κάθε $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με

$$x_1<x_2\Leftrightarrow\left|\begin{array}{l}x_1+1<x_2+1\\ \ln x_1<\ln x_2\end{array}\right.\Leftrightarrow \ln x_1+x_1+1<\ln x_2+x_2+1\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

Η ανίσωση γράφεται :

$$x^2+2\ln x<x+\ln x\Leftrightarrow x^2+\ln x^2+1<x+\ln x+1\Leftrightarrow f(x^2)<f(x)\Leftrightarrow$$
$$x^2<x\Leftrightarrow 0<x<1$$

Για να λύσουμε μια ανίσωση A(x)>B(x) προσπαθούμε να την φέρουμε στην μορφή
$f(\alpha(x))>f(\beta(x))$ **οπότε αν η f είναι γνησίως αύξουσα έχουμε** $\alpha(x)>\beta(x)$ **την οποία λύνουμε ,ενώ αν η f είναι γνησίως φθίνουσα έχουμε** $\alpha(x)<\beta(x)$ **την οποία λύνουμε .**

4. Έστω f και g δυο συναρτήσεις ορισμένες στο $\Re$, γνησίως αύξουσες με $f(x)>0, g(x)<0$

i) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο R.

ii) Να λυθεί η ανίσωση : $f(x)g(x^2)>f(x^2)g(x)\quad(1)$

<u>Λύση</u>

i) Έστω $x_1,x_2\in\Re$ με $x_1<x_2$ τότε

$$\begin{array}{l}f(x_1)<f(x_2)\\ g(x_1)<g(x_2)\end{array}\Leftrightarrow\begin{array}{l}f(x_1)<f(x_2)\\ \dfrac{1}{g(x_1)}>\dfrac{1}{g(x_2)}\end{array}\Leftrightarrow\begin{array}{l}0<f(x_1)<f(x_2)\\ 0<-\dfrac{1}{g(x_1)}<-\dfrac{1}{g(x_2)}\end{array}\Leftrightarrow-\frac{f(x_1)}{g(x_1)}<-\frac{f(x_2)}{g(x_2)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{f}{g}\right)(x_1)>\left(\frac{f}{g}\right)(x_2)$$

δηλαδή η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο R.

ii) Είναι $g(x)g(x^2)>0$ οπότε η (1) γράφεται

$$\frac{f(x)g(x^2)}{g(x)g(x^2)} > \frac{f(x^2)g(x)}{g(x)g(x^2)} \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} > \frac{f(x^2)}{g(x^2)} \overset{f/g\downarrow}{\Leftrightarrow} x < x^2 \Leftrightarrow x^2 - x > 0 \Leftrightarrow x < 0 \text{ ή } x > 1$$

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 5\ln x$.

α) Να μελετηθεί η μονοτονία της συνάρτησης f

β) Να λυθεί η ανίσωση $f(x^2 - x + 1) < 1$ (1)

<u>Λύση</u>

α) Για κάθε $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$ είναι:

$$\begin{array}{c} x_1{}^2 < x_2{}^2 \\ 5\ln x_1 < 5\ln x_2 \end{array} \Rightarrow x_1{}^2 + 5\ln x_1 < x_2{}^2 + 5\ln x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

β) Η (1) ισοδύναμα γράφεται:

$$f(x^2 - x + 1) < f(1) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} x^2 - x + 1 < 1 \Leftrightarrow x^2 - x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$$ (προφανώς

f(1)=1).

6. α) Να μελετηθεί η μονοτονία της συνάρτησης $f(x) = \alpha^x - x \quad , x \in \mathbb{R}, 0 < \alpha < 1$

β) Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \Re$ ώστε να ισχύει :

$\alpha^{\lambda^2 - 2} - \alpha^{\lambda - 2} < \lambda^2 - \lambda$, $\alpha \in (0,1)$.

<u>Λύση</u>

α)Θα μελετήσουμε την μονοτονία της f.

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \alpha^{x_1} > \alpha^{x_2} \\ -x_1 > -x_2 \end{array} \right. \quad \text{αρα} \quad \alpha^{x_1} - x_1 > \alpha^{x_2} - x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

δηλαδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R .

β) Είναι

$$\alpha^{\lambda^2 - 2} - \alpha^{\lambda - 2} < \lambda^2 - \lambda \Leftrightarrow \alpha^{\lambda^2 - 2} - \left(\lambda^2 - 2\right) < \alpha^{\lambda - 2} - (\lambda - 2) \Leftrightarrow f(\lambda^2 - 2) < f(\lambda - 2) \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 - 2 < \lambda - 2 \Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda < 0 \Leftrightarrow 0 < \lambda < 1 .$$

Ασκήσεις (Εισαγωγή στην ανάλυση)

1. Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2+2|x|}$ και $g(x)=1-\dfrac{2}{|x|}$ είναι ίσες.

2. Να εξετάσετε για τα παρακάτω ζεύγη των συναρτήσεων αν $f=g$. Αν $f\neq g$ να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του $\Re$ στο οποίο $f=g$.

α) $f(x)=\ln(x-1)+\ln(x-2)$ και $g(x)=\ln\left(x^2-3x+2\right)$

β) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-2}{x-1}}$ και $g(x)=\dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-1}}$

γ) $f(x)=\ln\dfrac{x-1}{x-2}$, $g(x)=\ln(x-1)-\ln(x-2)$

3. Δίνονται οι συναρτήσεις

$f(x)=\dfrac{(2-\alpha)x^2+2\alpha}{x+\alpha-3}$ και $g(x)=\dfrac{(2\alpha-1)x^2+2}{x-2}$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

Να βρεθεί η τιμή του α ώστε οι συναρτήσεις f,g να είναι ίσες.

4. α) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{x}{e^x-1}$ και $g(x)=\sqrt{1-e^x}$

Να οριστούν οι συναρτήσεις $f+g$, $\dfrac{f}{g}$.

β) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=1+\dfrac{1}{x}$, $g(x)=\dfrac{x}{1-x}$

Να οριστούν οι συναρτήσεις fg , f/g , g/f

5. Να γίνει η γραφική παράσταση των συναρτήσεων

α) $f(x)=x|x|$ β) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & x\geq 0\\ 2^x, & x<0\end{cases}$ γ) $f(x)=|\ln x|$

δ) $f(x)=\begin{cases}\ln x, & 0<x<3\\ -2x+3, & x\geq 3\end{cases}$

6.Να μελετηθεί η μονοτονία των συναρτήσεων

α) $f(x)=2\ln(x-2)-1$ $\quad ,g(x)=(x-1)^2 \quad ,x\geq 1 \quad ,h(x)=x-\dfrac{1}{x} \quad ,x>0$

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x+x$

α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα

β)Να λυθεί η ανίσωση $e^{x^2+x-1}-e^x+x^2-1<0$

8. Έστω η συνάρτηση $f(x)=e^x+x\text{ -}1$

α) Να δείξετε ότι η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο R

β)Βρείτε το πρόσημο της f

γ) Να βρεθεί ο λ ώστε $e^{\lambda+1}+\lambda=0$

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(x-1)+x-2$

α)Να μελετηθεί η μονοτονία της

β)Να βρεθεί το διάστημα των τιμών του x όπου η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ γ) Να βρεθεί το σύνολο των εικόνων των μιγαδικών z, αν ισχύει: $\ln|z|+|z|<1$

10.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x+2x$

i) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία

ii) Να λυθεί η ανίσωση $e^{\lambda^2-1}-e^{\lambda+1}+2\lambda^2-2\lambda-4>0$ (1) $\lambda\in\mathbb{R}$.

11. Έστω $f,g:R\to R$ δύο συναρτήσεις όπου η f είναι γνησίως αύξουσα, η g γνησίως φθίνουσα και $f(x)>0$ ενώ $g(x)<0$.

ι) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f\cdot g$ είναι γνησίως φθίνουσα στο R.

ιι) Να λυθεί η ανίσωση $\dfrac{f(2x)}{f(x^2)}>\dfrac{g(x^2)}{g(2x)}$

12. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\ln(x+1)+2x$

i) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και να λυθεί η ανίσωση $f(x) > 0$

ii) Αν $z \in C$ και $2(|z-1| - |z+1|) < \ln\dfrac{|z+1|+1}{|z-1|+1}$ να δείξετε ότι $Re(z) > 0$

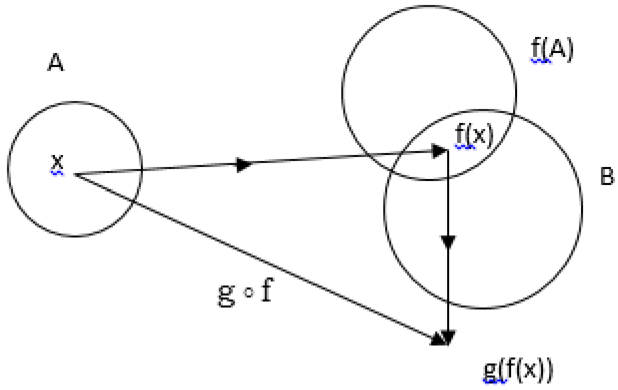
Σύνθεση συναρτήσεων

Έστω οι συναρτήσεις $f: A \to R$, $g: B \to R$. Ονομάζουμε **σύνθεση της f με την g** και τη συμβολίζουμε με $g \circ f$ τη συνάρτηση με τύπο $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Το πεδίο ορισμού της $g \circ f$ αποτελείται από όλα τα στοιχεία x του πεδίου ορισμού της f για τα οποία το f(x) ανήκει στο πεδίου ορισμού της g. Δηλαδή είναι το σύνολο

$A' = \{x \in A / f(x) \in B\}$. Είναι φανερό ότι η συνάρτηση $g \circ f$ ορίζεται αν $A' \neq \varnothing$.

Ο ρόλος της φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Παρατηρήσεις:

1.Αν $f(A) \subseteq B$ τότε $A' = A$

2.Αν $f(A) \cap B = \varnothing$ τότε δεν ορίζεται η

3.Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g \circ f$ είναι το $A' = \{x \in A / f(x) \in B\}$

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f \circ g$ είναι το $A' = \{x \in B / g(x) \in A\}$

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f \circ f$ είναι το $A' = \{x \in A / f(x) \in A\}$

4.α) Δεν ισχύει $f \circ g = g \circ f$

β) Αν ορίζεται η συνάρτηση $f\circ(g\circ h)$ τότε ορίζεται και η συνάρτηση $(f\circ g)\circ h$ και μάλιστα $f\circ(g\circ h)=(f\circ g)\circ h$.

Παραδείγματα

1. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2-4x$, $x\in[2,+\infty)$ και $g(x)=\sqrt{-x-3}$.

Να βρεθεί η συνάρτηση $g\circ f$.

<u>Λύση</u>

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι το

$B=\{x\in\mathbb{R}\,/\,-x-3\ge 0\}=[-3,+\infty)$. Θεωρούμε το σύνολο:

$A'=\{x\in A\,/\,f(x)\in B\}=\{x\ge 2\,/\,(x^2-4x)\ge -3\}$

Είναι:

$$\begin{cases} x\ge 2 \\ -3\le x^2-4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2 \\ x^2-4x+3\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{c} x\ge 2 \\ \\ x\le 1 \;\; \text{ή} \;\; x\ge 3 \end{array} \quad \text{οπότε} \;\; x\in[3,+\infty)$$

άρα $A'=[3,+\infty)$. Η $g\circ f$ ορίζεται στο A' με:

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=\sqrt{-f(x)-3}=\sqrt{-(x^2-4x)-3}$.

2. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x+1$ και $g(x)$ ώστε: $(f\circ g)(x)=2\ln x-3$

, x>0.

Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης g.

<u>Λύση</u>

$(f\circ g)(x)=2\ln x-3 \Leftrightarrow f(g(x))=2\ln x-3 \Leftrightarrow g(x)+1=2\ln x-3 \Leftrightarrow g(x)=2\ln x-4$

3. Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=\ln(x-1)$, $g(x)=\sqrt{-x}$.

Να βρείτε τις συναρτήσεις ι) $g\circ f$ ii) $f\circ f$

<u>Λύση</u>

i) Η f έχει πεδίο ορισμού το $A=(1,+\infty)$ ενώ η g έχει πεδίο ορισμού το

$B=(-\infty,0]$

Η $g\circ f$ έχει πεδίο ορισμού το

$A'=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\in A\,,f(x)\in B\}=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x>1\,,\ln(x-1)\le 0\}$

Είναι

$\ln(x-1) \le 0 \Leftrightarrow x-1 \le 1 \Leftrightarrow x \le 2$,οπότε $A' = (1,2]$.Για κάθε $x \in A'$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\ln(x-1)) = \sqrt{-\ln(x-1)}$

ιι) Η $f \circ f$ έχει πεδίο ορισμού το

$A_1 = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \in A \,, f(x) \in A\} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x > 1 \,, \ln(x-1) > 1\}$

Είναι

$\ln(x-1) > 1 \Leftrightarrow x-1 > e \Leftrightarrow x > e+1$,οπότε $A_1 = (1+e, +\infty)$.Για κάθε $x \in A_1$

$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(\ln(x-1)) = \ln(\ln(x-1)-1)$

4. Δίνονται οι συναρτήσεις $I(x) = x$ και $f(x) = \dfrac{\alpha x - 1}{x+2}$, $\alpha \in \Re$. Να βρεθούν οι τιμές του α ώστε οι συναρτήσεις $f \circ f$ και I να είναι ίσες στο σύνολο $A = \mathbb{R} - \{-2\}$.

<u>Λύση</u>

Έστω ότι υπάρχει $\alpha \in \Re$ ώστε : $f \circ f = I$ για κάθε $x \in A$. Τότε:

$$f(f(x)) = x \Leftrightarrow \frac{\alpha f(x) - 1}{f(x)+2} = x \Leftrightarrow \alpha f(x) - 1 = x f(x) + 2x \Leftrightarrow \alpha \frac{\alpha x - 1}{x+2} - 1 = x\frac{\alpha x - 1}{x+2} + 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha+2)x^2 + (4-\alpha^2)x + \alpha + 2 = 0 \Leftrightarrow \{\alpha + 2 = 0 \;\text{ και }\; 4 - \alpha^2 = 0\} \Leftrightarrow \alpha = -2$$

Θα δείξουμε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f \circ f$ είναι το $\mathbb{R} - \{-2\}$

. Πράγματι

$$A' = \{x \in A_f \,/\, f(x) \in A_f\} = \{x \ne -2 \;\text{ και }\; f(x) \ne -2\} = \left\{x \ne -2 \;\text{ και }\; \frac{-2x-1}{x+2} \ne -2\right\} =$$

$$= \mathbb{R} - \{-2\}$$

5. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει:

$$f(f(x)) = 4 - 3x \quad (1), x \in \mathbb{R}$$

Να δείξετε ότι

α) $f(4-3x) = 4 - 3f(x)$, $x \in \mathbb{R}$

β) $f(1) = 1$

γ) η f δεν είναι γνησίως μονότονη

Λύση

α) Θέτουμε όπου x το f(x) οπότε έχουμε :

$$f(f(f(x)))=4-3f(x)\overset{(1)}{\Leftrightarrow}f(4-3x)=4-3f(x)$$

β)Από το α) ερ. για x=1 έχουμε: $f(1)=4-3f(1)\Leftrightarrow f(1)=1$

γ) Υποθέτουμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη π.χ. γνησίως αύξουσα, τότε:

$$x_1<x_2\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)\Leftrightarrow f(f(x_1))<f(f(x_2))\Leftrightarrow 4-3x_1<4-3x_2\Leftrightarrow x_1>x_2$$

(ΑΤΟΠΟ) Όμοια αν υποθέσουμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Προσοχή

Όταν δίνεται η σχέση f(f(x))=A(x) (1) και δεν γνωρίζουμε τον τύπο της f(x) , τότε θέτουμε στην (1) όπου x το f(x) , οπότε έχουμε:

$$\mathbf{f(f(f(x)))=A(f(x))\overset{(1)}{\Leftrightarrow}\ f(A(x))=A(f(x))}\ \textbf{κ.λ.π}$$

Ασκήσεις στη σύνθεση

1. Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x-1}$ $,g(x)=\ln(x-1)$. Να βρεθούν οι συναρτήσεις i) $g\circ f$ ii) $f\circ g$.

2. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=e^x-x$ $,g(x)=\dfrac{3x}{x-2}$. Να βρεθούν οι συναρτήσεις i) $g\circ g$ ii) $f\circ g$.

3. Να βρείτε συνάρτηση f τέτοια ώστε να ισχύει

i) $(f\circ g)(x)=\sqrt{2x^2-4x+3}$ αν $g(x)=x-1$

ii) $(f\circ g)(x)=\dfrac{2-x}{2+x}$ αν $g(x)=\ln x$.

4. Να βρείτε συνάρτηση f τέτοια ώστε να ισχύει

$(g\circ f)(x)=x^2-\eta\mu x+1$ αν $g(x)=2x+3$

5. Αν η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $[0,1]$ να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x)=f(x-1)-f(\ln x)+f(e^{-x})$

6. Έστω $f(x)=\ln(x+1)$ και $g(x)=\sqrt{2-e^x}$. Να βρεθεί η $g\circ f$.

7.Να εξετάσετε αν υπάρχει συνάρτηση $f(x)=\alpha x+\beta$, $\alpha,\beta>0$ ώστε $(f\circ f)(x)=9x+8$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

8. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$ και $g(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$. Να δείξετε ότι $(g\circ f)(x)=x$ στο R.

9. Να γραφούν οι συναρτήσεις:

i) $f(x)=\sqrt{\eta\mu(\ln x)}$ ii) $g(x)=\ln\sqrt{1-x^2}$ iii) $h(x)=x^x$

ως σύνθεση δύο ή περισσότερων συναρτήσεων.

10. Αν $f,g:R\to R$ περιττές συναρτήσεις και η σύνθεσή τους ορίζεται στο $\mathbb{R}$, να δείξετε ότι η συνάρτηση $g\circ f$ είναι περιττή.

11.Έστω η συνάρτηση $f:R\to R$ ώστε : $f(f(x))=x^2-x+1$ (1) για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι $f(x^2-x+1)=f^2(x)-f(x)+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

και στη συνέχεια να βρεθεί το $f(1)$.

12.Έστω οι συναρτήσεις $f,g:R\to R$

i) Αν f, g γνησίως αύξουσες και οι δύο ή γνησίως φθίνουσες και οι δύο, να δείξετε ότι η $g\circ f$ είναι γνησίως αύξουσα.

ii) Να εξετάσετε αν υπάρχει γνησίως μονότονη συνάρτηση $f:R\to R$ ώστε $(f\circ f)(x)=-e^x$ για κάθε $x\in\Re$.

13.Αν η f είναι γνησίως αύξουσα και η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ να λύσετε την ανίσωση: $(f\circ g)(x^2-2x)\geq(f\circ g)(x+4)$.

14. Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=e^x+x-1$ και $g(x)+e^{g(x)}=2x+1$, $x\in\mathbb{R}$

ι) να δείξετε ότι $g(0)=0$

ιι) να δείξετε ότι οι f και g είναι γνησίως αύξουσες
ιιι) να λύσετε την ανίσωση $g(f(x)) > 0$

<u>Ένα προς Ένα και Αντίστροφη</u>

Ορισμός:

Μία συνάρτηση $f : A \to R$ λέγεται **1-1** όταν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$ ισχύει η συνεπαγωγή $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Με απαγωγή σε άτοπο αποδεικνύεται ότι:

Μία συνάρτηση $f : A \to R$ λέγεται **1-1** όταν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή

αν $f(x_1) = f(x_2)$ τότε $x_1 = x_2$.

<u>Παρατηρήσεις:</u>

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A

1. Αν η f είναι «1-1» τότε η εξίσωση $f(x) = y$ έχει το πολύ μία λύση στο A και ειδικότερα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ μία ρίζα στο A. Αν το y ανήκει στο σύνολο τιμών της f τότε η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μία λύση στο A.

2. Αν η f είναι «1-1» η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ το πολύ σε ένα σημείο.

3. Αν η f δεν είναι «1-1» τότε υπάρχουν $x_1 \neq x_2$ ώστε $f(x_1) = f(x_2)$ ή ισοδύναμα υπάρχει ευθεία παράλληλη στον άξονα $x'x$ η οποία τέμνει την C_f σε δύο τουλάχιστον σημεια.

4. Αν η f είναι «1-1» τότε κάθε ευθεία παράλληλη στον άξονα $x'x$ τέμνει την C_f το πολύ σε ένα σημείο.

5. Αν η f είναι γνησίως μονότονη τότε είναι και «1-1» (όχι αντίστροφα).

6. Αν η f είναι «1-1» τότε και η f^{-1} είναι «1-1»

7. Τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} δεν βρίσκονται κατ' ανάγκη στην ευθεία $y = x$.Για να τα βρούμε λύνουμε το σύστημα

$$\begin{cases} y = f(x) \\ x = f(y) \\ x \in A \cap f(A) \end{cases}$$

<u>**Αντίστροφη Συνάρτηση:**</u>

<u>**Ορισμός**</u>

Έστω μια συνάρτηση $f : A \to R$.Αν υποθέσουμε ότι η f είναι **1-1**, τότε για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών , f(A), της f υπάρχει μοναδικό στοιχείο του πεδίου ορισμού της A για το οποίο ισχύει $f(x) = y$. Επομένως ορίζεται μια συνάρτηση που ονομάζεται **αντίστροφη της f** και συμβολίζεται με f^{-1}, όπου

$f^{-1} : f(A) \to \mathbb{R}$

με την οποία κάθε $y \in f(A)$ αντιστοιχίζεται μοναδικό $x \in A$ για το οποίο $f(x) = y$

(Προσοχή: η f^{-1} δεν είναι η $\frac{1}{f}$)

Από τον τρόπο που ορίστηκε η f^{-1} προκύπτει ότι :

Α. Έχει πεδίο ορισμού το $f(A)$

Β. Έχει σύνολο τιμών το A

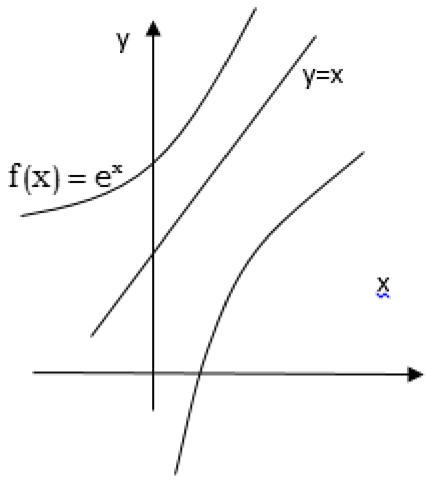
Γ. Ισχύει: $f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$ για κάθε $x \in A$ και $y \in f(A)$

Ισχύουν οι σχέσεις:

$f^{-1}(f(x)) = x$, $x \in A$ και $f(f^{-1}(y)) = y$, $y \in f(A)$.

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$.

Αυτό σημαίνει ότι αν η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία y =x σ'ένα σημείο Κ , τότε και η γραφική παράσταση της f^{-1} τέμνει την ευθεία y =x στο Κ.



Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x) = e^x$ μάθαμε ότι έχει αντίστροφη την $f^{-1}(x) = \ln x$.

Παρατήρηση :

1. Οι εξισώσεις $f(x) = x$ και οι $f^{-1}(x) = x$ έχουν τις ίδιες λύσεις στο σύνολο $A \cap f(A)$.

2. Τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων C_f και $C_{f^{-1}}$ δεν βρίσκονται κατ' ανάγκη στην ευθεία y =x .

<u>**Παραδείγματα**</u>

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3 + \sqrt{x - 3}$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι ένα προς ένα

β) Να βρεθεί η αντίστροφή της.

<u>Λύση</u>

α) Το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο $A = [3, +\infty)$. Έστω $x_1, x_2 \in A$ με

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow 2 + \sqrt{x_1 - 3} = 2 + \sqrt{x_2 - 3} \Leftrightarrow \sqrt{x_1 - 3} = \sqrt{x_2 - 3} \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

δηλαδή η f είναι «1-1» συνεπώς υπάρχει η αντίστροφη της f.

β) Θα βρούμε το πεδίο ορισμού και τον τύπο της αντίστροφης

$\left|\begin{array}{l} f(x)=y \\ x\geq 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 2+\sqrt{x-3}=y \\ x\geq 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} \sqrt{x-3}=y-2 \\ x\geq 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x-3=(y-2)^2 \\ y\geq 2 \\ x\geq 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x=3+(y-2)^2 \\ y\geq 2 \\ 3+(y-2)^2\geq 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x=3+(y-2)^2 \\ y\geq 2 \end{array}\right.$

οπότε το σύνολο τιμών της f είναι το $f(A)=[2,+\infty)$ το οποίο από την θεωρία είναι το πεδίο ορισμού της αντίστροφης . Άρα

$f^{-1}:[2,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f^{-1}(x)=3+(x-2)^2$.

2. Να βρεθεί η συνάρτηση f^{-1} όταν $f(x)=5x^3-4$.

<u>Λύση</u>

Εξετάζουμε αν η f είναι «1-1» .

Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με

$f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow 5{x_1}^3-4=5{x_2}^3-4\Leftrightarrow {x_1}^3={x_2}^3\Leftrightarrow x_1=x_2$

άρα η f είναι «1-1».

$$f(x)=y\Leftrightarrow 5x^3-4=y\Leftrightarrow x^3=\frac{y+4}{5}\Leftrightarrow x=\begin{cases} \sqrt[3]{\dfrac{y+4}{5}} & y\geq -4 \\ -\sqrt[3]{\dfrac{-y-4}{5}} & y<-4 \end{cases}$$

οπότε $f(A)=\mathbb{R}$

Επομένως : $f^{-1}(x)=\begin{cases} \sqrt[3]{\dfrac{y+4}{5}} & y\geq -4 \\ -\sqrt[3]{\dfrac{-y-4}{5}} & y<-4 \end{cases}$

3. Μία συνάρτηση $f:R\to R$ έχει την ιδιότητα $(f\circ f)(x)+3f(x)=x^{2003}$ (1) για κάθε $x\in\Re$.Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι «1-1».

<u>Λύση</u>

Έστω $x_1,x_2\in\Re$ με $f(x_1)=f(x_2)$ τότε:

$$\left|\begin{array}{l} f(f(x_1))=f(f(x_2)) \\ 3f(x_1)=3f(x_2) \end{array}\right. \Leftrightarrow f(f(x_1))+3f(x_1)=f(f(x_2))+3f(x_2)\overset{(1)}{\Leftrightarrow} {x_1}^{2003}={x_2}^{2003}\Leftrightarrow x_1=x_2$$

4. Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:R\to R$ με

$f(f(x))=x^2-5x+9$ και $g(x)=x^2-xf(x)+3$, $x\in\Re$.

Να δείξετε ότι $f(3)=3$ και ότι η g δεν αντιστρέφεται.

<u>Λύση</u>

i) Από τη σχέση $f(f(x))=x^2-5x+9$ έχουμε

$f(f(f(x)))=f^2(x)-5f(x)+9\Leftrightarrow f(x^2-5x+9)=f^2(x)-5f(x)+9$ και για x=3 έχουμε

$$f(3)=f^2(3)-5f(3)+9\Leftrightarrow f(3)=f^2(3)-5f(3)+9\Leftrightarrow (f(3)-3)^2=0\Leftrightarrow f(3)=3$$

ii) Είναι $g(x)=x^2-xf(x)+3$.Οπότε

$$\left.\begin{array}{r}g(3)=9-3f(3)+3=3\\ g(0)=3\end{array}\right\}g(0)=g(3)$$

Άρα η g δεν είναι «1-1» και κατά συνέπεια δεν αντιστρέφεται.

5. Έστω μια συνάρτηση $f:R\to R$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$,γνησίως μονότονη της οποίας η γραφική της παράσταση περνά από τα σημεία Α(5,9) και Β(2,3).

i) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα

ii) Να λυθεί η εξίσωση $f(3+f^{-1}(x^2+2x))=9$

<u>Λύση</u>

i) Αφού η f είναι γνησίως μονότονη ,θα είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.

Επειδή η γραφική της παράσταση περνά από τα σημεία Α(5,9) και Β(2,3) έχουμε

$f(5)=9$ και $f(2)=3$. Είναι

$2<5\Leftrightarrow f(2)<f(5)$ συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii)

$$f(3+f^{-1}(x^2+2x))=f(5)\overset{f\ll 1-1\gg}{\Longleftrightarrow}3+f^{-1}(x^2+2x)=5\Leftrightarrow f^{-1}(x^2+2x)=2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f^{-1}(x^2+2x)=f^{-1}(3)\Leftrightarrow x^2+2x=3\Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=-3$$

Ασκήσεις στην «1-1» και «αντίστροφη συνάρτηση»

1. Έστω η συνάρτηση $f(x)=1+(x-1)^2$, $x\ge 1$.

Α)Να δείξετε ότι είναι «1-1» και να βρεθεί η f^{-1}.

Β)Να βρεθούν τα κοινά σημεία των C_f ,$C_{f^{-1}}$ με την ευθεία $y = x$.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2 + \sqrt{\ln x}$. Να δείξετε ότι υπάρχει η f^{-1} και να βρεθεί .

3. Ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι «1-1» και να βρεθούν οι αντίστροφες όπου υπάρχουν

i) $f(x) = \ln(1 - x)$ ii) $g(x) = x^2 - 1$ iii) $h(x) = \sqrt[3]{1 - x}$

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(1 + e^x)$. Να βρεθεί η f^{-1}

5. Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = \dfrac{1 - e^x}{1 + e^x}$ και $g(x) = 1 - e^x$

i) Να βρεθεί η f^{-1} ii) Να βρεθεί η $g \circ f^{-1}$.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x-1} + x + 2$

i) Να δείξετε ότι η f είναι «1-1»

ii) Να λυθεί η εξίσωση: $f(x) = 4$

7. Έστω μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$(f \circ f)(x) - f(x) = 2x$ (1) $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι υπάρχει η f^{-1} και ότι $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{2}(f(x) - x)$ $, x \in \mathbb{R}$

β) Αν $f(2) = 4$ να βρεθεί η $f^{-1}(8)$

8. Έστω μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, για την οποία υποθέτουμε ότι $f^3(x) + f(x) = x$ (1) για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι η f είναι «1-1» έπειτα να βρείτε τον τύπο της f^{-1} .

9. Έστω μια συνάρτηση $f:R\to R$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$f(f(x))+f^3(x)=2x+3$ (1) για κάθε $x\in\Re$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι «1-1»

β) Να βρεθεί η f^{-1} συναρτήσει της f .

10. Έστω οι συναρτήσεις $f,g:R\to R$ ώστε

$g(g(x))=g(x)+f(x^3)$ για κάθε $x\in\Re$ και η f είναι «1-1». Να δείξετε ότι η g είναι «1-1».

11. Έστω μια συνάρτηση $f:R\to R$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $(f\circ f)(x)=2x-1$ (1) κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι

α) η f είναι «1-1» β) $f^{-1}(x)=\dfrac{f(x)+1}{2}$, $x\in\Re$ γ) να βρεθεί το $f(1)$ και να δείξετε ότι η $g(x)=1-x^3+x^2f(x)$ δεν είναι «1-1».

12. Έστω η συνάρτηση $f:R\to R$ με $f(x)=\ln e^x-\ln(1+e^x)$

i) Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση της f και να την βρείτε

ii) Αν $g(x)=\ln x$ να βρεθεί η $f^{-1}\circ g$ και να λυθεί η εξίσωση $(f^{-1}\circ g)(x)=-g(x)$.

13. Έστω μια συνάρτηση $f:R\to R$ γνησίως μονότονη με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, της οποίας η γραφική της παράσταση περνά από τα σημεία Α(5,9) και Β(2,3).

i) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα

ii) Να λυθεί η εξίσωση: $f(3+f^{-1}(x^2+2x))=9$

iii) Να λυθεί η ανίσωση: $f^{-1}(6+f(x+1))<5$

14. Έστω μια συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ όπου

$f(xy)=f(x)+f(y) \quad (1) \;\; x,y>0$

Να δείξετε ότι

i) $f(1)=0$ ii) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=-f(x)$, $x>0$ iii) αν η $f(x)=0$ έχει μοναδική λύση την $x=1$ να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη .

Επανάληψη

1. Έστω οι συναρτήσεις $f,g:R\to R$ ώστε : $f(g(x))=4x-9 \quad (1) \;\; x\in\mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι «1-1»

β) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα να δείξετε ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα

γ) Αν οι f και g ίσες με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ να εκφράσετε την f^{-1} συναρτήσει της f.

2. Έστω η συνάρτηση $f:R\to R$ ώστε $(f\circ f)(x)=9x-8 \quad (1) \;\; x\in\mathbb{R}$

i) Να δείξετε ότι η f είναι «1-1»

ii) $f(9x-8)=9f(x)-8$, $x\in\Re$

iii) Να βρεθεί το $f(1)$

iv) Αν $f(x)=\alpha x+\beta$, $\alpha>0$ να βρεθούν οι τιμές των α,β .

3. Έστω η συνάρτηση $f:R\to R$ ώστε $(f\circ f)(x)=-x \quad (1)$, $x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι

i) η f είναι 1-1 ii) Η f δεν είναι γνησίως μονότονη

iii) η f είναι περιττή iv) $f(0)=0$.

4. Έστω f γνησίως μονότονη συνάρτηση στο $\Re$ με σύνολο τιμών το $\Re$. Αν η C_f περνά από τα σημεια Α(3,10), Β(7,8) να λυθεί η ανίσωση :

$f(4+f^{-1}(x^3+2))>8$.

5. Έστω συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\Re$ με $f(x)-f(y)=f\left(\dfrac{x}{y}\right) \quad (1) \;\; x,y\in(0,+\infty)$

Έστω ακόμη ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική λύση την $x=1$.

i) Να δείξετε ότι η f είναι «1-1»

ii) Να λυθεί η εξίσωση: $f(x)+f(x^2+3)=f(x^2+1)+f(x+1)$, x>0 .

6. Εστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ και την ιδιότητα $(f\circ f)(x)=2-x$ (1) $x\in\mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι

α) $f(2-x)+f(x)=2$ $,x\in\mathbb{R}$

β) η f αντιστρέφεται

γ) $f^{-1}(x)=f(2-x)$

δ) η f δεν είναι γνησίως μονότονη

7. Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f^3(x)=x+1$ (1) για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα

β) Να δείξετε ότι η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα

γ) Να μελετηθεί η μονοτονία της συνάρτησης $g(x)=f(\alpha^x)+x$ $,\alpha>1$ και στη συνέχεια να λυθεί η ανίσωση $f(\alpha^{x^2-16})-f(\alpha^{x-4})\le -x^2+x+12$.

8. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με την ιδιότητα :

$f(x+y)=f(x)+f(y)$ $,x,y\in\mathbb{R}$

και η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια μόνο λύση .

α) Βρείτε το $f(0)$

β) Να δείξετε ότι η f είναι περιττή

γ) $f(x-y)=f(x)-f(y)$ $,x,y\in\mathbb{R}$

δ) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται

ε) Αν η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ να δείξετε ότι :

$f^{-1}(x+y)=f^{-1}(x)+f^{-1}(y)$ $,x,y\in\mathbb{R}$

στ) Αν $f(x)>0$ για κάθε $x>0$

i) να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα .

ii) να λύσετε την ανίσωση : $f(e^x+1)+f(3x+1)<f(e^x-x)$

9. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}\,,f(x)\neq 0$ με την ιδιότητα $f(xy)=f(x)f(y)$ $,x,y\in\mathbb{R}-\{0\}$.Η γραφική παράσταση της f τέμνει την $y=x$ το πολύ σε ένα σημείο .Αν η εξίσωση $f(x)=1$ έχει μοναδική ρίζα την $x=1$

να δείξετε ότι

α) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{f(x)}$

β) η f είναι 1-1

γ) η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ έχει αντίστροφη

10. α) Να βρεθεί η αντίστροφη σχέση της συνάρτησης $f(x)=-x^3$

β)Να βρεθούν τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1}.

11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=1+\ln(\sqrt{x-1}+1)$

α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρεθεί η αντίστροφη

β) Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x+1)=3$

12. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ και την ιδιότητα: $f(f(x))=x-1 \quad ,x\in\mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και $f^{-1}(x)-f(x)=1 \quad ,x\in\mathbb{R}$

β) Η C_f δεν έχει κοινά σημεία με την ευθεία $y=x$

13. Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \quad , f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ και

$(f\circ f+g\circ f)(x)=x \, , x\in\mathbb{R}$

Να δείξετε ότι

α) η f αντιστρέφεται στο $\mathbb{R}$

β) ισχύει $f^{-1}(x)=f(x)+g(x) \quad ,x\in\mathbb{R}$

14. Έστω η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(x)>0$ και $f(f(x))=xf(x)$ για κάθε $x>0$

α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται

β) Αν η f έχει σύνολο τιμών το $(0,+\infty)$,να δείξετε ότι $f\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)=x$ για κάθε $x>0$.

15. Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f\left(\dfrac{x+f(x)}{2}\right)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$,να αποδείξετε ότι $f(x)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

16. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(f(x))=x+f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι

α) Υπάρχει η αντίστροφη της f

β) $f(0)=0$

γ) Αν $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ τότε $f(x)=x+f^{-1}(x)$ και $f\big(f(x)-x\big)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

<u>Ερωτήσεις</u>

1. Αν η f έχει πεδίο ορισμού το Α τότε το σύνολο τιμών είναι το $f(A) = \{............\}$

2. Έστω $f: A \to \mathbb{R}$, $g: B \to \mathbb{R}$ τότε

α) το πεδίο ορισμού των $f \circ g, \dfrac{f}{g}$ είναι αντίστοιχα

....

β)Πότε λέμε ότι $f = g$;

γ) Αν $\alpha, \beta \in A$ $\alpha = \beta \Leftrightarrow f(\alpha) = f(\beta)$;

δ) Πότε λέμε ότι η f αντιστρέφεται ;

ε) Πότε λέμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα;

3 .Είναι Σωστό να πούμε

i) $f \circ g = g \circ f$

ιι)Αν η f δεν είναι γνησίως αύξουσα τότε είναι γνησίως φθίνουσα

ιιι) Αν η f δεν είναι γνησίως αύξουσα τότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in A_f$,με $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

iv) Αν η f είναι γνησίως μονότονη τότε η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ το πολύ σε ένα σημείο

v) Αν η f είναι γνησίως μονότονη , τότε η γραφική παράσταση της f είναι συμμετρική της γραφικής παράστασης της f^{-1} , ως προς την ευθεία $y = x$.

vi) Αν η f δεν αντιστρέφεται ,τότε η f δεν είναι γνησίως μονότονη

vii) Τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} βρίσκονται στην ευθεία $y = x$.

4. Είναι Σ ή Λ οι παρακάτω προτάσεις ;

Έστω $f: A \to \mathbb{R}$,$g: B \to \mathbb{R}$

α)Αν $f = g$ τότε $A = B$

β) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ για κάθε $x \in A \cap B$

γ)Αν η f είναι 1-1 είναι και γνησίως μονότονη

δ)Αν η γραφική παράσταση της f ,η οποία είναι 1-1 ,τέμνει την y=x στο σημείο Κ τότε και η γραφική παράσταση της f^{-1} περνά από το Κ

ε)Αν η g είναι 1-1 ,τότε και η g^{-1} είναι 1-1

ζ) Αν η g είναι 1-1 ,τότε $g(x)=y \Leftrightarrow g^{-1}(y)=x \quad ,x \in B, y \in g(B)$

η)Αν ορίζεται η $(f \circ g) \circ h$,τότε ορίζεται η $f \circ (g \circ h)$ και ισχύει $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

θ)Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το f(A)

ι)Αν f,g είναι 1-1 τότε $f \circ g$ είναι 1-1

κ)Αν f είναι 1-1 τότε για κάθε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει : $x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$