**ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)**

**ΔΕΥΤΕΡΑ 28 ΜΑΪΟΥ 2012**

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:**

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

## ΘΕΜΑ Α

**Α1.** Αποδεικνύουμε το θεώρημα στην περίπτωση που είναι $f'(x)>0$.

Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1)<f(x_2)$. Πράγματι, στο διάστημα $[x_1,x_2]$ η $f$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, οπότε έχουμε $f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)$. Επειδή $f'(\xi)>0$ και $x_2-x_1>0$, έχουμε $f(x_2)-f(x_1)>0$, οπότε $f(x_1)<f(x_2)$.

**Α2.** Μια συνάρτηση $f$ θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του $(\alpha,\beta)$ και επιπλέον $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)=f(\alpha)$ και $\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)=f(\beta)$.

**Α3.** Μια συνάρτηση *f*, με πεδίο ορισμού *A*, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο, όταν υπάρχει $\delta>0$, τέτοιο ώστε $f(x)\le f(x_0)$ για κάθε $x\in A\cap(x_0-\delta, x_0+\delta)$. Το $x_0$ λέγεται θέση ή σημείο τοπικού μεγίστου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό μέγιστο της *f*.

**Α4.** α) Σωστό
β) Σωστό
γ) Λάθος
δ) Λάθος
ε) Λάθος

## ΘΕΜΑ Β

**Β1.** Είναι

$$|z-1|^2+|z+1|^2=4 \Leftrightarrow (z-1)(\bar{z}-1)+(z+1)(\bar{z}+1)=4$$
$$\Leftrightarrow |z|^2-z-\bar{z}+1+|z|^2+z+\bar{z}+1=4$$
$$\Leftrightarrow 2|z|^2=2 \Leftrightarrow |z|=1.$$

Άρα, ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών $z$ είναι ο κύκλος με κέντρο το $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=1$.

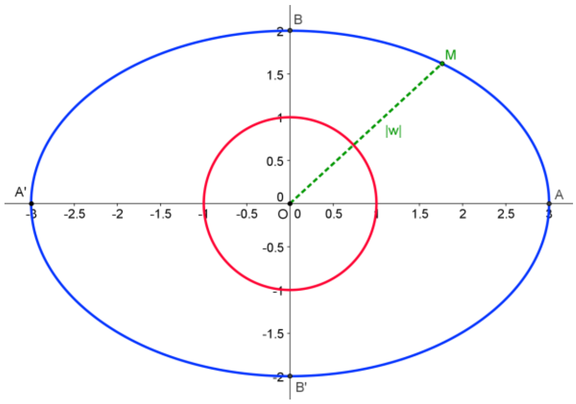
**B2.** Έχουμε ότι $|z_1|=|z_2|=1$. Επίσης:

$$|z_1-z_2|=\sqrt{2} \Leftrightarrow |z_1-z_2|^2=(\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow |z_1|^2+|z_2|^2-2\mathrm{Re}(\bar{z}_1 z_2)=2 \Leftrightarrow Re(\bar{z}_1 z_2)=0.$$

$|z_1+z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+2\mathrm{Re}(\bar{z}_1 z_2)=2$. Άρα, $|z_1+z_2|=\sqrt{2}$.

**B3.** Έστω $w=x+yi$, όπου $\mathrm{x},\mathrm{y}\in\mathbb{R}$. Τότε $|w-5\bar{w}|=|x+yi-5(x-yi)|=|-4x+6iy|=12$ άρα ισοδύναμα παίρνουμε

$$\left|-\frac{x}{3}+\frac{y}{2}i\right|=1 \Leftrightarrow \sqrt{\left(-\frac{x}{3}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2}=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1.$$




Συνεπώς ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας $\mathrm{M}(\mathrm{x},\mathrm{y})$ του μιγαδικού w είναι η προηγούμενη έλλειψη.
Οι κορυφές της έλλειψης είναι $\mathrm{A}(3,0)$, $\mathrm{A}'(-3,0)$ και $\mathrm{B}(0,2)$, $\mathrm{B}'(0,-2)$. Ο μεγάλος άξονας έχει μήκος $2a=(\mathrm{AA}')=6$ και ο μικρός άξονας $2\beta=(\mathrm{BB}')=4$.
Είναι γνωστό από τα μαθηματικά κατεύθυνσης της Β Λυκείου (σελίδα 104) ότι για οποιοδήποτε σημείο Μ της έλλειψης ισχύει ότι $\beta\le(\mathrm{MO})\le\alpha$. Άρα, $2\le|w|\le3$. Για $w=2i$ ή $w=-2i$ έχουμε ότι $\min|w|=2$ και για $w=3$ ή $w=-3$ έχουμε ότι $\max|w|=3$.

**B4.** Από την τριγωνική ανισότητα $||z|-|w||\le|z+w|\le|z|+|w|$ βάζοντας όπου w το −w παίρνουμε την $||z|-|w||\le|z-w|\le|z|+|w|$. Άρα αφενός $|z-w|\le|z|+|w|\le1+3=4$ και αφετέρου $|z-w|\ge||z|-|w||\overset{|x|\ge x}{\ge}|w|-|z|\ge2-1=1$ έχουμε:

$$1=2-1\le|w|-|z|\le|w-z|\le|w|+|z|\le3+1=4$$

## ΘΕΜΑ Γ

**Γ1.** Η συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x>0$ διότι προκύπτει από πράξεις μεταξύ των παραγωγίσιμων συναρτήσεων $f_1(x)=x-1$ (πολυώνυμο), $f_2(x)=\ln x$ (λογαριθμική συνάρτηση).

Είναι $f'(x)=\ln x+\dfrac{x-1}{x}=\dfrac{x\ln x+x-1}{x}$.

Έχουμε $f'(1)=0$.

Αν $0<x<1$ τότε $\ln x<0 \Rightarrow x\ln x<0$ και $x-1<0$. Επομένως $x\ln x+x-1<0$ και έτσι $f'(x)<0$ για $0<x<1$. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$.

| **x** | **0** | | **1** | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{f'(x)}$ | | - | 0 | + | |
| $\mathbf{f(x)}$ | $+\infty$ | ↘ | *Ο.ε* *-1* | ↗ | $+\infty$ |

Αν $x>1$ τότε $\ln x>0 \Rightarrow x\ln x>0$ και $x-1>0$. Επομένως $x\ln x+x-1>0$ και έτσι $f'(x)>0$ για $x>1$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

Η $f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ άρα $f\left((0,1]\right)=\left[f(1),\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\right)=[-1,+\infty)$ διότι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[(x-1)\ln x-1\right]=+\infty$.

Η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$ άρα $f\left([1,+\infty)\right)=\left[f(1),\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right)=[-1,+\infty)$

διότι $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left[(x-1)\ln x-1\right]=+\infty$

Οπότε τελικά το σύνολο τιμών της $f$ είναι $[-1,+\infty)$.

**Γ2.** Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$x^{x-1}=e^{2013} \Leftrightarrow (x-1)\ln x=2013 \Leftrightarrow (x-1)\ln x-1=2012 \Leftrightarrow f(x)=2012$

Όμως επειδή $f\left((0,1]\right)=[-1,+\infty)$, η $f$ είναι συνεχής στο $(0,1]\subseteq(0,+\infty)$ και $2012\in[-1,+\infty)$ άρα από το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών υπάρχει $x_1\in(0,1)$ ώστε $f(x_1)=2012$. Επειδή επιπλέον η $f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$, το $x_1$ είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης $f(x)=2012$ στο $(0,1)$.

<u>Πιο αναλυτικά:</u> Αφού $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(f(x)-2012\right)=+\infty$ οπότε $f(x)-2012>0$ για κάθε $x$ κοντά στο 0. Συνεπώς υπάρχει $k>0$ κοντά στο 0 (άρα $k<1$) ώστε $f(k)-2012>0$ δηλαδή $f(k)>2012$. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\mathrm{k},1]$ και $f(1)<2012<f(k)$ οπότε εφαρμόζοντας το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών στο διάστημα $[\mathrm{k},1]$ έχουμε το παραπάνω συμπέρασμα.

Όμοια αφού $f\left([1,\infty)\right)=[-1,+\infty)$, η $f$ είναι συνεχής στο $[1,+\infty)\subseteq(0,+\infty)$ και $2012\in[-1,+\infty)$ άρα από το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών (η αναλυτική δικαιολόγηση είναι όμοια με την παραπάνω) υπάρχει $x_2\in(1,+\infty)$ ώστε $f(x_2)=2012$. Επειδή επιπλέον η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$, άρα το $x_2$ είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης $f(x)=2012$ στο $(1,+\infty)$.

Άρα τελικά η αρχική εξίσωση έχει ακριβώς δύο θετικές λύσεις $x_1$ και $x_2$.

**Γ3.** Θέλουμε να δείξουμε ότι η εξίσωση

$f'(x)+f(x)=2012 \Leftrightarrow f'(x)e^x+f(x)e^x=2012e^x \Leftrightarrow \left(f(x)e^x-2012e^x\right)'=0$ έχει λύση στο διάστημα $(x_1,x_2)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $H(x)=f(x)e^x-2012e^x,\ x\in[x_1,x_2]$. Η συνάρτηση $H$ είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$ διότι προκύπτει από πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμη στο $(x_1,x_2)$ διότι προκύπτει από πράξεις παραγωγισίμων συναρτήσεων με $H'(x)=f'(x)e^x+f(x)e^x-2012e^x$.

Επίσης $H(x_1)=H(x_2)=0$ διότι από το προηγούμενο ερώτημα ισχύει $f(x_1)=f(x_2)=2012$.

Συνεπώς ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle για την $H$ στο $[x_1, x_2]$. Άρα υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$ ώστε

$$H'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0)e^{x_0} + f(x_0)e^{x_0} - 2012e^{x_0} = 0 \overset{e^{x_0} \neq 0}{\Leftrightarrow} f'(x_0) + f(x_0) = 2012.$$

**Γ4.** Επειδή το σύνολο τιμών της $f$ είναι το $[-1, +\infty)$ άρα για κάθε $x > 0$ ισχύει $f(x) \geq -1 \Leftrightarrow f(x) + 1 \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq 0$. Επίσης η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = -1$ άρα και της $g(x) = 0$ είναι το $x = 1$. Συνεπώς το ζητούμενο εμβαδό είναι το

$$E = \int_1^e g(x)dx = \int_1^e (x-1)\ln x dx = \int_1^e \left( \frac{(x-1)^2}{2} \right)' \ln x dx$$

$$= \left[ \frac{(x-1)^2}{2} \ln x \right]_0^e - \int_1^e \frac{(x-1)^2}{2} \frac{1}{x} dx = \frac{(e-1)^2}{2} - \frac{1}{2} \int_1^e \frac{x^2 - 2x + 1}{x} dx$$

$$= \frac{(e-1)^2}{2} - \frac{1}{2} \int_1^e \left( x - 2 + \frac{1}{x} \right) dx = \frac{(e-1)^2}{2} - \frac{1}{2} \left[ \frac{x^2}{2} - 2x + \ln x \right]_1^e$$

$$= \frac{e^2 - 2e + 1}{2} - \frac{1}{2} \left( \frac{e^2}{2} - 2e + 1 - \frac{1}{2} + 2 \right) = \frac{e^2 - 3}{4} \tau.\mu.$$

## ΘΕΜΑ Δ

**Δ1.** Θεωρούμε συνάρτηση $g(x) = \int_1^{x^2 - x + 1} f(t)dt - \frac{x - x^2}{e}, x \in (0, +\infty)$.

Από την υπόθεση έχουμε ότι: $g(x) \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq g(1)$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$, οπότε η $g$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = 1$, οπότε παρουσιάζει και τοπικό ελάχιστο για $x = 1$.

Η συνάρτηση $g$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ (ως διαφορά συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων), παρουσιάζει και τοπικό ελάχιστο για $x = 1$ που είναι εσωτερικό σημείο του $A_g = (0, +\infty)$, οπότε από το θεώρημα του Fermat έχουμε ότι $g'(1) = 0$.

Όμως $g'(x) = f(x^2 - x + 1)(2x - 1) - \frac{1 - 2x}{e}$, οπότε $g'(1) = f(1) + \frac{1}{e}$

και αφού $g'(1) = 0$, έχουμε ότι $f(1) + \frac{1}{e} = 0 \Leftrightarrow f(1) = -\frac{1}{e}$ (1) .

Η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$, οπότε διατηρεί πρόσημο και κατά συνέπεια λόγω της (1) έχουμε ότι $f(x) < 0$.

Τότε από την υπόθεση έχουμε $lnx - x = \left( \int_1^x \frac{lnt - t}{f(t)} dt + e \right) f(x)$ (2)

Αφού $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$, από την (2) βρίσκουμε ότι $\frac{lnx - x}{f(x)} = \int_1^x \frac{lnt - t}{f(t)} dt + e$ (3)

Θέτουμε $F(x)=\int_1^x \frac{lnt-t}{f(t)}dt$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ [δικαιολόγηση: Η συνάρτηση με τύπο lnt – t είναι συνεχής στο (0, +∞) ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων και αφού η f είναι συνεχής στο (0, +∞) με f(t) ≠ 0, για κάθε t > 0, η συνάρτηση $\frac{\ln t-t}{f(t)}$ είναι επίσης συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων. Επομένως ορίζεται η συνάρτηση $\int_1^x \frac{\ln t-t}{f(t)}dt$ στο $(0,+\infty)$ στο οποίο είναι παραγωγίσιμη] με $F'(x)=\frac{\ln x-x}{f(x)}$ οπότε η (3) παίρνει τη μορφή:

$F'(x)=F(x)+e \Leftrightarrow e^{-x}F'(x)-e^{-x}F(x)=e^{-x+1} \Rightarrow e^{-x}F(x)=-e^{-x+1}+c, c\in\mathbb{R}$ (4)

Για $x=1$ η (4) γίνεται: $e^{-1}F(1)=-e^{-1+1}+c \Leftrightarrow c=1$, άρα από την (4) έχουμε:

$$e^{-x}F(x)=-e^{-x+1}+1 \Leftrightarrow F(x)=-e^{-1}+e^{x} \Leftrightarrow \int_1^x \frac{lnt-t}{f(t)}dt=e^{x}-e^{-1} \quad (5)$$

Το πρώτο μέλος της (5) είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση. Επίσης παραγωγίσιμη είναι και η συνάρτηση $e^{x}-e^{-1}$ ως διαφορά των παραγωγίσιμων συναρτήσεων $e^{x}$ (εκθετική) και $e^{-1}$ (σταθερή). Παραγωγίζοντας την (5) βρίσκουμε ότι: $\frac{lnx-x}{f(x)}=e^{x} \Leftrightarrow f(x)=e^{-x}(lnx-x)$.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως γινόμενο των παραγωγίσιμων συναρτήσεων $e^{-x}$ [σύνθεση των παραγωγίσιμων $e^{x}$ (εκθετική) και –x (πολυωνυμική)] και $\ln x-x$ [διαφορά των παραγωγίσιμων lnx (λογαριθμική) και –x (πολυωνυμική)].

**Δ2.** Για $x\in(0,1)$ έχουμε ότι: $\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{lnx-x}{e^{x}}=-\infty$, αφού $\lim_{x\to0^+} lnx=-\infty$, $\lim_{x\to0^+} x=0$ και $\lim_{x\to0^+} e^{x}=1$.

Τότε για τον υπολογισμό του ορίου $\lim_{x\to0^+}\left(f^2(x)\eta\mu\frac{1}{f(x)}-f(x)\right)$ θέτουμε $u=\frac{1}{f(x)}$, οπότε $u\to0^-$, άρα για $x\in(0,1)$ έχουμε ότι:

$$\lim_{x\to0^+}\left(f^2(x)\eta\mu\frac{1}{f(x)}-f(x)\right)=\lim_{u\to0^-}\left(\frac{1}{u^2}\eta\mu u-\frac{1}{u}\right)=\lim_{u\to0^-}\frac{\eta\mu u-u}{u^2}$$
$$=\lim_{u\to0^-}\frac{\sigma\upsilon\nu u-1}{2u}=0$$

αφού $\lim_{x\to0}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=0$ και δεδομένου ότι για το όριο $\lim_{u\to0^-}\frac{\eta\mu u-u}{u^2}$ ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του De L' Hospital, αφού $\lim_{u\to0^-}(\eta\mu u-u)=\lim_{u\to0^-}u^2=0$ και υπάρχει το $\lim_{u\to0^-}\frac{(\eta\mu u-u)'}{(u^2)'}=\lim_{u\to0^-}\frac{\sigma\upsilon\nu u-1}{2u}=0$.

**Δ3.** Η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, οπότε ορίζεται η $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ και είναι παραγωγίσιμη με $\mathrm{F}'(\mathrm{x})=\mathrm{f}(\mathrm{x})=\mathrm{e}^{-\mathrm{x}}(\ln\mathrm{x}-\mathrm{x})$.

Η $\mathrm{F}'$ είναι παραγωγίσιμη αφού η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$$F''(x)=f'(x)=-e^{-x}(lnx-x)+e^{-x}\left(\frac{1}{x}-1\right)=e^{-x}\left(-lnx+x+\frac{1}{x}-1\right)\geq e^{-x}\frac{1}{x}$$

αφού $x-1-lnx\geq 0,\ x\in(0,+\infty)$.

Επιπλέον αφού ισχύει $e^{-x}\dfrac{1}{x}>0$ για κάθε $x>0$, έχουμε ότι $F''(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$, οπότε η συνάρτηση $F$ είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$ και η $\mathrm{F}'$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Η συνάρτηση $F$ είναι συνεχής στα $[x,2x],[2x,3x]\subset(0,+\infty)$ με $x>0$ αφού είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, είναι παραγωγίσιμη στα $(x,2x),(2x,3x)\subset(0,+\infty)$ με $x>0$ αφού είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, οπότε από το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού υπάρχουν $x_1\in(x,2x)$, $x_2\in(2x,3x)$ ώστε $F'(x_1)=\dfrac{F(2x)-F(x)}{2x-x}=\dfrac{F(2x)-F(x)}{x}$ $(6)$ και

$$F'(x_2)=\frac{F(3x)-F(2x)}{3x-2x}=\frac{F(3x)-F(2x)}{x} \quad (7).$$

Όμως $x_1<x_2$ και η $\mathrm{F}'$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, οπότε $F'(x_1)<F'(x_2)$ και από τις $(6)$, $(7)$ βρίσκουμε:

$$\frac{F(2x)-F(x)}{x}<\frac{F(3x)-F(2x)}{x}\Leftrightarrow F(2x)-F(x)<F(3x)-F(2x)\Leftrightarrow F(x)+F(3x)>2F(2x),$$

αφού $x>0$.

**Δ4.** Έχουμε ότι: $lnx\leq x-1\Leftrightarrow lnx-x\leq -1, x>0$ και $e^{-x}>0, x>0$,

άρα $e^{-x}(lnx-x)<0, x>0$, οπότε $F'(x)=f(x)<0, x>0$, άρα η συνάρτηση $F$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=2F(x)-F(\beta)-F(3\beta), x\in[\beta,2\beta]\subset(0,+\infty)$.

Η συνάρτηση $h$ είναι συνεχής στο $[\beta,2\beta]$, ως άθροισμα των συνεχών συναρτήσεων $2\mathrm{F}$ (αποδείξαμε νωρίτερα ότι είναι παραγωγίσιμη) και της σταθεράς $\mathrm{F}(\beta)+\mathrm{F}(3\beta)$, με

$h(\beta)=2F(\beta)-F(\beta)-F(3\beta)=F(\beta)-F(3\beta)>0$ (αφού η συνάρτηση $F$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$ και $\beta<3\beta$)

$h(2\beta)=2F(2\beta)-F(\beta)-F(3\beta)<0$ (από το ερώτημα Δ3),

οπότε $h(\beta)h(2\beta)<0$, δηλαδή από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $\xi\in(\beta,2\beta)$ έτσι ώστε

$h(\xi)=0\Leftrightarrow 2F(\xi)=F(\beta)+F(3\beta)$.