ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 28 ΜΑΪΟΥ 2012
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ŪΆζ ȷ ȼq ?

ΘΕΜΑ Α

A1. ɆGɞəɸɧ ɓɸəɶ ůǓɬǚǓ **253**
A2. ɆGɞəɸɧ ɓɸəɶ ůǓɬǚǓ **191**
A3. ɆGɞəɸɧ ɓɸəɶ ůǓɬǚǓ **258**
A4. **α.** Ɇɤ ůǗɧ , **β.** Ɇɤ ůǗɧ, **γ.** ȿϒɗɞɠ, **δ.** ȿϒɗɞɠ, **ε.** Ɇɤ ůǗɧ.

ΘΕΜΑ Β

B1. $1^{ος}$ τρόπος

$$|z-3|^2+|z+3|^2=36 \Leftrightarrow (z-3)(\bar{z}-3)+(z+3)(\bar{z}+3)=36 \Leftrightarrow$$

$$z\bar{z}-3z-3\bar{z}+9+z\bar{z}+3z+3\bar{z}+9=36 \Leftrightarrow 2z\bar{z}=18 \Leftrightarrow z\bar{z}=9 \Leftrightarrow$$

$$|z|^2=9 \Leftrightarrow |z|=3$$

άρα ο γ.τ. των εικόνων του z είναι

κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ = 3

$2^{ος}$ τρόπος

$$|z-3|^2+|z+3|^2=36 \overset{z=x+yi}{\Leftrightarrow} |x+yi-3|^2+|x+yi+3|^2=36 \Leftrightarrow$$

$$\left(\sqrt{(x-3)^2+y^2}\right)^2+\left(\sqrt{(x+3)^2+y^2}\right)^2=36 \Leftrightarrow$$

$$(x-3)^2+y^2+(x+3)^2+y^2=36 \Leftrightarrow$$

$$x^2-6x+9+y^2+x^2+6x+9+y^2=36 \Leftrightarrow$$

$$2x^2+2y^2=18 \Leftrightarrow x^2+y^2=9$$

άρα ο γ.τ. των εικόνων του z είναι

κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ = 3

Β2. • $|z_1 - z_2| = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow |z_1 - z_2|^2 = (3\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow$

$(z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = 18 \Leftrightarrow z_1\bar{z}_1 - z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2 + z_2\bar{z}_2 = 18 \Leftrightarrow$

$|z_1|^2 - z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2 + |z_2|^2 = 18 \Leftrightarrow - z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2 = 0 \Leftrightarrow$

$z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = 0 \quad (1)$

• $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = z_1\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 + z_2\bar{z}_2$

$= |z_1|^2 + z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 + |z_2|^2 \overset{(1)}{=} 9 + 0 + 9 = 18$

άρα $|z_1 + z_2| = 3\sqrt{2}$

Β3. 1^{ος} τρόπος

$|2w - 1| = |w - 2| \underset{x,\, y \in IR}{\overset{w = x + yi}{\Leftrightarrow}} |2x + 2yi - 1| = |x + yi - 2| \Leftrightarrow$

$|(2x - 1) + 2yi| = |(x - 2) + yi| \Leftrightarrow$

$\sqrt{(2x - 1)^2 + (2y)^2} = \sqrt{(x - 2)^2 + y^2} \Leftrightarrow$

$(2x - 1)^2 + (2y)^2 = (x - 2)^2 + y^2 \Leftrightarrow$

$4x^2 - 4x + 1 + 4y^2 = x^2 - 4x + 4 + y^2 \Leftrightarrow$

$3x^2 + 3y^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$

άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των w είναι

κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ = 1

2^{ος} τρόπος

$|2w - 1| = |w - 2| \Leftrightarrow |2w - 1|^2 = |w - 2|^2 \Leftrightarrow$

$(2w - 1)(2\bar{w} - 1) = (w - 2)(\bar{w} - 2) \Leftrightarrow$

$4w\bar{w} - 2w - 2\bar{w} + 1 = w\bar{w} - 2w - 2\bar{w} + 4 \Leftrightarrow$

$3w\bar{w} = 3 \Leftrightarrow w\bar{w} = 1 \Leftrightarrow |w|^2 = 1 \Leftrightarrow |w| = 1$

άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των w είναι

κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ = 1

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f'(x) = \left(\frac{2}{x} + \alpha x^2 + \beta\right)' = -\frac{2}{x^2} + 2\alpha x < 0$, αφού $\alpha < 0,\ x > 0$

άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0\ ,+\infty)$

Γ2. Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta = (0\ ,+\infty)$.

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2}{x} + \alpha x^2 + \beta\right) = +\infty\\ &\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{2}{x} + \alpha x^2 + \beta\right) \overset{\alpha<0}{=} -\infty\end{aligned}\right\} \Rightarrow f(\Delta) = \mathbb{R}$$

Είναι $0 \in f(\Delta)$,

άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια ακριβώς λύση στο $(0\ ,+\infty)$

Γ3. i) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2}{x} + \alpha x^2 + \beta\right) = +\infty$,

άρα η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x = 0$ για κάθε $\alpha,\ \beta$

ii)

- αν $\alpha > 0$, τότε $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{2}{x} + \alpha x^2 + \beta\right) \overset{\alpha>0}{=} +\infty$
- αν $\alpha < 0$, τότε $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{2}{x} + \alpha x^2 + \beta\right) \overset{\alpha<0}{=} -\infty$
- αν $\alpha = 0$, τότε $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{2}{x} + \beta\right) = \beta \in \mathbb{R}$

άρα η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την $y = \beta$

μόνο αν $\alpha = 0$ και για κάθε $\beta \in \mathbb{R}$

Γ4. Για να παρουσιάζει η f τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 1$ την τιμή 7

πρέπει $f'(1) = 0$ και $f(1) = 7$

$f'(1) = 0 \Leftrightarrow -2 + 2\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$

$f(1) = 7 \Leftrightarrow 2 + \alpha + \beta = 7 \overset{\alpha = 1}{\Leftrightarrow} \beta = 4$

Για $\alpha = 1$ και $\beta = 4$ είναι :

$$f(x) = \frac{2}{x} + x^2 + 4$$

$$f'(x) = \left(\frac{2}{x} + x^2 + 4\right)' = -\frac{2}{x^2} + 2x = \frac{2x^3 - 2}{x^2} = \frac{2(x-1)(x^2+x+1)}{x^2}$$

x	0	1	$+\infty$
f΄(x)	-	0	+
f	↘		↗

τοπ. ελάχιστο

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θεωρούμε συνάρτηση φ, με $\varphi(x) = \dfrac{f(x) + \eta\mu x}{x^2 - x}$, $x \in \mathbb{R} - \{0,1\}$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0} \varphi(x) = 2$ και

$f(x) + \eta\mu x = \varphi(x)\cdot(x^2 - x) \Leftrightarrow f(x) = -\eta\mu x + \varphi(x)\cdot(x^2 - x)$ **(1)**

- $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) \overset{(1)}{=} \lim\limits_{x\to 0}\left[-\eta\mu x + \varphi(x)\cdot(x^2 - x)\right]$

$$= \lim_{x\to 0}(-\eta\mu x) + \lim_{x\to 0}\varphi(x)\cdot\lim_{x\to 0}(x^2 - x) = 0 + 2\cdot 0 = 0$$

- $f(1) = f'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} \overset{(1)}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\eta\mu x + \varphi(x)\cdot x\cdot(x-1)}{x}$

$$= \lim_{x\to 0}\left[-\frac{\eta\mu x}{x} + \frac{\varphi(x)\cdot\cancel{x}\cdot(x-1)}{\cancel{x}}\right]$$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x} + \lim_{x\to 0}\varphi(x)\cdot\lim_{x\to 0}(x-1) = -1 + 2\cdot(-1) = -3$$

Δ2. Η g είναι παραγωγίσιμη στο [0 , 1] ως πράξεις παραγωγίσιμων

με $g'(x) = f'(x) + 2\alpha\cdot(x+1)$

$g(0) = f(0) + \alpha = 0 + \alpha = \alpha$

$g(1) = f(1) + 4\alpha = 4\alpha - 3$

Για να ικανοποιεί η g τις υποθέσεις του Θ. Rolle πρέπει

$4\alpha - 3 = \alpha \Leftrightarrow 3\alpha = 3 \Leftrightarrow \alpha = 1$

Για $\alpha = 1$ είναι :

$g(x) = f(x) + (x+1)^2$

$g'(x) = f'(x) + 2(x+1)$

$g''(x) = f''(x) + 2$

Δ3. • Από το Θ. Rolle με τη συνάρτηση g, προκύπτει ότι η $g'(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0\,,\,1)$

• $g''(x) = f''(x) + 2 > 0$, διότι $f''(x) > -2$, άρα η g' είναι γνησίως αύξουσα άρα η $g'(x) = 0$ έχει μια το πολύ ρίζα στο IR

Επομένως υπάρχει ένα μοναδικό $\xi \in (0\,,\,1)$, τέτοιο ώστε

$$g'(\xi) = 0 \;\Leftrightarrow\; f'(\xi) + 2(\xi+1) = 0 \;\Leftrightarrow\; f'(\xi) = -2(\xi+1)$$

Δ4. Το ξ είναι η μοναδική ρίζα της g'

$$g'(x) > 0 \;\Leftrightarrow\; g'(x) > g'(0) \;\overset{g'\uparrow}{\Leftrightarrow}\; x > 0$$

x	0		ξ		$+\infty$
$g'(x)$		$-$		$+$	
g		$\searrow$		$\nearrow$	

Η g παρουσιάζει ελάχιστο για $x = \xi$.