

Τετάρτη 23 Μαΐου 2012
Μαθηματικά Γενικής Παιδείας Εσπερινών Λυκείων
Ενδεικτικές απαντήσεις

ΘΕΜΑ Α

- A1. Απόδειξη σελ. 31 Βιβλίο
A2. Θεωρία σελ 148
A3. σελ. 96-97
A4. α) Λ β) Σ γ) Λ δ) Σ ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

$$f(x) = x^2 + \alpha x + \beta$$

B1) Σημείο τομής με yy' για $x = 0$ είναι $f(0) = \beta$

$$\text{Είναι } f'(x) = 2\alpha x + \alpha$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(0) = \varepsilon\varphi 45 \\ f'(0) = \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha = \varepsilon\varphi 45 \Rightarrow \alpha = 1$$

$$\text{Οπότε } f(x) = x^2 + x + \beta$$

B2)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) + \beta x}{x + 1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x + \beta + \beta x}{x + 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x + 1) + \beta(x + 1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\cancel{(x + 1)}(x + \beta)}{\cancel{x + 1}} = \beta - 1 \end{aligned}$$

$$\text{Οπότε } \beta - 1 = 6 \Rightarrow \beta = 7$$

B3)

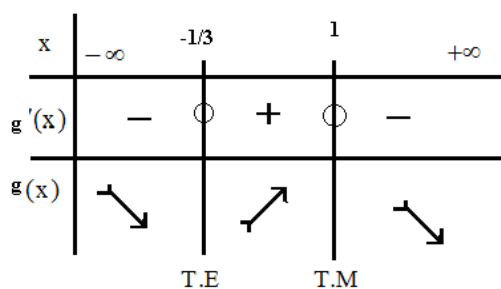
$$\text{Είναι } \alpha = 1, \beta = 7 \text{ Άρα } f(x) = x^2 + x + 7$$

$$\text{Οπότε } g(x) = f(x) - x^3 = x^2 + x + 7 - x^3 = -x^3 + x^2 + x + 7, x \in \mathbb{R}$$

$$g'(x) = -3x^2 + 2x + 1$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow -3x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$\Delta = 4 - 4 \cdot (-3) \cdot 1 = 16 \quad x_{1,2} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{3} \end{cases}$$



Στο $(-\infty, -\frac{1}{3}]$ η g γνησίως φθίνουσα

Στο $[-\frac{1}{3}, 1]$ η g γνησίως αύξουσα

Στο $[1, +\infty)$ η g γνησίως φθίνουσα

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Επειδή $F_2\% = 50\% \Rightarrow \delta = 25$

Γ2.

Είναι $c = \frac{R}{K} = \frac{45-5}{4} = \frac{40}{4} = 10$ οπότε οι κλάσεις γίνονται $[5, 15), [15, 25)$ κλπ

Είναι $v = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = \alpha + 4 + 3\alpha - 6 + 2\alpha + 8 + \alpha - 2 = 7\alpha + 4$

Είναι $N_2 = \alpha + 4 + 3\alpha - 6 = 4\alpha - 2$

$F_2 = \frac{N_2}{v} \Rightarrow 0,5 = \frac{4\alpha - 2}{7\alpha + 4} \Rightarrow 4\alpha - 2 = 3,5\alpha + 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0,5\alpha = 4 \Rightarrow \alpha = \frac{4}{0,5} \Rightarrow \alpha = 8$

Άρα ο πίνακας γίνεται:

Κλάσεις	X_i	V_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$
$[5, 15)$	10	12	20	12	20
$[15, 25)$	20	18	30	30	50
$[25, 35)$	30	24	40	54	90
$[35, 45)$	40	6	10	60	100
Σύνολο	-	60	100	-	-

Γ3.

Μέση Τιμή

$$\bar{x} = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^4 x_i \cdot v_i = \frac{10 \cdot 12 + 20 \cdot 18 + 30 \cdot 24 + 40 \cdot 6}{60} = \frac{120 + 360 + 720 + 240}{60} = \frac{1440}{60} = 24 \text{ min}$$

Διακύμανση

$$s^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^4 (x_i - \bar{x})^2 v_i = \frac{(10-24)^2 \cdot 12 + (20-24)^2 \cdot 18 + (30-24)^2 \cdot 24 + (40-24)^2 \cdot 6}{60} =$$
$$= \frac{196 \cdot 12 + 16 \cdot 18 + 36 \cdot 24 + 256 \cdot 6}{60} = \frac{5040}{60} = 84$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{84} \approx 9,17$$

Γ4.

Θεωρούμε ότι η κατανομή είναι ομοιόμορφη

Στο διάστημα $[35, 45)$ πλάτους 10 έχουμε 10%

Στο διάστημα $[37, 45)$ πλάτους 8 έχουμε x

$$x = \frac{10\% \cdot 8}{10} = 8\%$$

ΘΕΜΑ Δ



Δ1)

$$f(x) = \frac{2}{x^2 + 1}$$

$$f'(x) = \frac{(2)' \cdot (x^2 + 1) - 2 \cdot (x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-2(2x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-4x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-4x}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Rightarrow -4x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$f'(x) > 0 \Rightarrow \frac{-4x}{(x^2 + 1)^2} > 0 \Rightarrow -4x > 0 \Rightarrow x < 0$$

x	$-\infty$		$+\infty$
f'(x)	+	○	-
f(x)			

Hf(x) είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$

Hf(x) είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$

Δ2

$0 < \alpha < \beta < \gamma < 3$ και επειδή στο $[0, +\infty)$ η f είναι

γν. φθίνουσα άρα $f(0) > f(\alpha) > f(\beta) > f(\gamma) > f(3)$

$R = \text{Έυρος} = \text{Μεγαλύτερη τιμή} - \text{μικρότερη τιμή} =$

$$= f(0) - f(3) = 2 - \frac{2}{10} = \frac{20}{10} - \frac{2}{10} = 1,8$$

Δ3

Η εφαπτομένη είναι $y = \lambda x + \beta$

Στο $x = 1$ είναι

$$y = f(1) = \frac{2}{1^2 + 1} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\lambda = f'(1) = \frac{-4 \cdot 1}{(1^2 + 1)^2} = \frac{-4}{2^2} = \frac{-4}{4} = -1$$

Οπότε $y = \lambda x + \beta \Rightarrow 1 = -1 \cdot 1 + \beta \Rightarrow 2 = \beta$

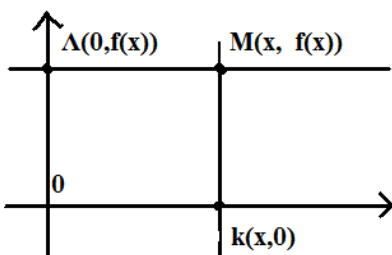
Άρα $\varepsilon: y = -x + 2$

Είναι $\bar{x} = 10$, $S_x = 2$ και $\varepsilon: y = -x + 2$

$$\bar{y} = -1 \cdot \bar{x} + 2 = -10 + 2 = -8$$

$$S_y = |-1| S_x = 1 \cdot 2 = 2$$

Δ4)

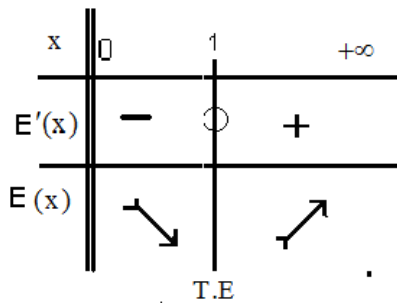


Το εμβαδό του ΟΚΜΛ είναι

$$E(x) = (OK) \cdot (OL) = x \cdot f(x) = x \frac{1 + \ln^2 x}{x} = 1 + \ln^2 x$$

$$E'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2 \ln x}{x} = 0 \stackrel{x > 0}{\Rightarrow} 2 \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$E'(x) > 0 \Rightarrow \frac{2 \ln x}{x} > 0 \stackrel{x > 0}{\Rightarrow} 2 \ln x > 0 \Rightarrow \ln x > 0 \Rightarrow x > 1$$



Άρα για $x=1$ το εμβαδό γίνεται ελάχιστο οπότε είναι $(OK)=1$

$$\text{Και } (OK) = f(1) = \frac{1 + \ln^2 1}{1} = \frac{1 + 0}{1} = 1$$

Άρα $(OK)=(OK)$ και έχουμε ότι το εμβαδό γίνεται ελάχιστο όταν έχουμε τετράγωνο