ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x),\ x \in \mathbb{R}$

Μονάδες 7

Α2. Σε ένα πείραμα με ισοπίθανα αποτελέσματα να δώσετε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας ενός ενδεχομένου Α.

Μονάδες 4

Α3. Πως ορίζεται ο συντελεστής μεταβολής ή συντελεστής μεταβλητότητας μιας μεταβλητής Χ, αν $\bar{x} > 0$ και πώς, αν $\bar{x} < 0$.

Μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται μόνο για τη γραφική παράσταση ποσοτικών δεδομένων.(Μονάδες 2)

β. Η παράγωγος της f στο x_o εκφράζει το ρυθμό μεταβολής του $y = f(x)$ ως προς x, όταν $x = x_o$. (μονάδες 2)

γ. Αν Α,Β ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $A \subseteq B$ τότε ισχύει ότι $P(A) > P(B)$. (μονάδες 2)

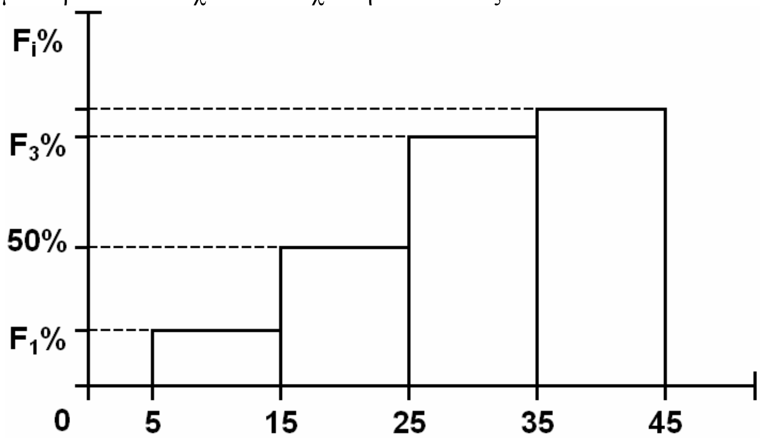
δ. Το εύρος, η διακύμανση και η τυπική απόκλιση των τιμών μιας μεταβλητής είναι μέτρα διασποράς (μονάδες 2)

ε. $\lim_{x \to x_o} ημx = ημx_o,\ x_o \in \mathbb{R}$ (μονάδες 2)

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Οι χρόνοι (σε λεπτά) που χρειάστηκαν οι μαθητές μιας τάξης για να λύσουν ένα μαθηματικό πρόβλημα ανήκουν στο διάστημα [5,45) και έχουν ομαδοποιηθεί σε τέσσερις κλάσεις ίσου πλάτους. Τα δεδομένα των χρόνων εμφανίζονται στο παρακάτω ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό.



Β1. Με βάση το παραπάνω ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό, να υπολογίσετε τη διάμεσο των χρόνων που χρειάστηκαν οι μαθητές.

Μονάδες 4

Β2. Στον επόμενο πίνακα συχνοτήτων της κατανομής των χρόνων, να αποδείξετε ότι α=8 (μονάδες 3) και να μεταφέρετε τον πίνακα κατάλληλα συμπληρωμένο στο τετράδιό σας (μονάδες 5).

Χρόνοι	x_i	v_i	f_i%	N_i	F_i%
[5,....)		α+4			
[....,....)		3α-6			
[....,....)		2α+8			
[....,45)		α-2			
Συνολο					

Μονάδες 8

Β3. Να βρεθεί η μέση τιμή $\bar{x}$ και η τυπική απόκλιση s των χρόνων που χρειάστηκαν οι μαθητές.
(Δίνεται ότι: $\sqrt{84} \approx 9,17$)

Μονάδες 8

Β4. Να βρεθεί το ποσοστό των μαθητών που χρειάστηκαν τουλάχιστον 37 λεπτά να λύσουν το μαθηματικό πρόβλημα.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Από τους μαθητές μιας τάξης ενός σχολείου επιλέγουμε τυχαία έναν μαθητή. Αν ν φυσικός αριθμός με $\nu \geq 3$, τότε η πιθανότητα του ενδεχομένου ο μαθητής να μαθαίνει

- Γαλλικά είναι $\frac{3\nu}{\nu^2+1}$
- Ισπανικά είναι $\frac{\nu+2}{\nu^2+1}$
- και τις δύο παραπάνω γλώσσες είναι $\frac{\nu+1}{\nu^2+1}$
- μια τουλάχιστον από τις παραπάνω γλώσσες είναι ίση με το όριο $\lim\limits_{x\to -1}\frac{2(\sqrt{x^2+3}-2)}{x^2+x}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι το ενδεχόμενο ο μαθητής να μαθαίνει μία τουλάχιστον από τις παραπάνω δύο γλώσσες είναι βέβαιο. **Μονάδες 7**

Γ2. Να αποδείξετε ότι $\nu = 3$ **Μονάδες 6**

Γ3. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου ο μαθητής να μαθαίνει μόνο μία από τις δύο γλώσσες.

Μονάδες 6

Γ4. Αν ο αριθμός των μαθητών που μαθαίνουν και τις δύο παραπάνω γλώσσες είναι 32, να βρείτε τον αριθμό των μαθητών της τάξης. **Μονάδες 6**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1+\ln^2 x}{x}$, $x>0$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα. **Μονάδες 5**

Δ2. Έστω Μ(x,f (x)), x > 0 σημείο της γραφικής παράστασης της f. Η παράλληλη ευθεία από το Μ προς τον άξονα y′y τέμνει τον ημιάξονα Οx στο σημείο Κ(x,0) και η παράλληλη ευθεία από το Μ προς τον άξονα x′x τέμνει τον ημιάξονα Οy στο σημείο Λ(0,f(x)). Αν Ο είναι η αρχή των αξόνων, να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλόγραμμου ΟΚΜΛ γίνεται ελάχιστο, όταν αυτό γίνει τετράγωνο. **Μονάδες 7**

Δ3. Έστω η ευθεία ε :y = λx + β, β ≠10, η οποία είναι παράλληλη προς την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Σ(1,f (1)). Θεωρούμε δέκα σημεία (x_i, y_i), i=1,2,…,10 της ευθείας ε , τέτοια ώστε οι τετμημένες τους x_i να έχουν μέση τιμή $\bar{x}=10$ και τυπική απόκλιση $s_x = 2$.Να βρείτε για ποιες τιμές του β το δείγμα των τεταγμένων y_i των δέκα σημείων είναι ομοιογενές.

Μονάδες 8

Δ4. Αν Α και Β είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα, τέτοια ώστε $A \neq \varnothing$ και $A \cap B \neq \varnothing$ να αποδείξετε ότι $f(P(A)) + f(P(A\cap B)) \geq 2f(P(A \cup B))$.

Μονάδες 5

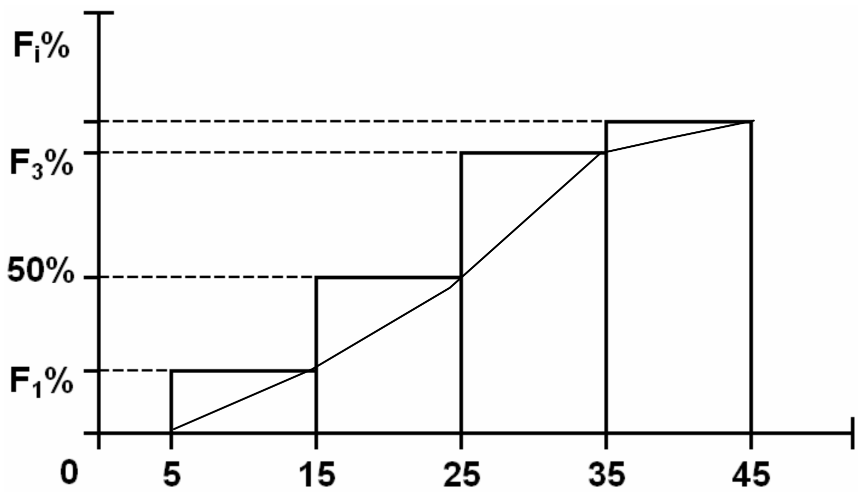
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 31
Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 148
Α3. Σχολικό βιβλίο σελ 96
Α4. **α.** Λ **β.** Σ **γ.** Λ **δ.** Σ **ε.** Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1.



Από το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων βλέπουμε ότι δ =25.

Β2. Αφού η διάμεσος ταυτίζεται με το άνω όριο της δεύτερης κλάσης τότε :

$v_1 + v_2 = v_3 + v_4 \Leftrightarrow \alpha + 4 + 3\alpha - 6 = 2\alpha + 8 + \alpha - 2 \Leftrightarrow \alpha + 3\alpha - 2\alpha - \alpha = 6 - 4 + 8 - 2 \Leftrightarrow \alpha = 8$.

Επομένως:

Χρόνοι	x_i	v_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$
[5,15)	10	12	20	12	20
[15,25)	20	18	30	30	50
[25,35)	30	24	40	54	90
[35,45)	40	6	10	60	100
Συνολο	-	60	100	-	-

Β3. $\bar{x} = \dfrac{10 \cdot 12 + 20 \cdot 18 + 30 \cdot 24 + 40 \cdot 6}{60} = \dfrac{1440}{60} = 24$

$$s^2 = \frac{(10-24)^2 \cdot 12 + (20-24)^2 \cdot 18 + (30-24)^2 \cdot 24 + (40-24)^2 \cdot 6}{60} = \frac{2352 + 288 + 864 + 1536}{60} = \frac{5040}{60} = 84$$

Άρα $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{84} \approx 9.17$

Β4. Κατά την ομαδοποίηση υποθέτουμε ότι οι τιμές σε κάθε κλάση κατανέμονται ομοιόμορφα. Από 37 εως 45 λεπτά για να λύσουν το πρόβλημα χρειάζεται το $\dfrac{8}{10} \cdot f_4\% = 8\%$ των μαθητών.

Σχόλιο : Το **Β4** μπορεί να λυθεί και με όμοια τρίγωνα.

ΘΕΜΑ Γ

Έστω τα ενδεχόμενα Γ: ο μαθητής μαθαίνει Γαλλικά και Ι: ο μαθητής μαθαίνει Ισπανικά.

Γ1. $$\lim_{x \to -1} \frac{2(\sqrt{x^2+3} - 2)}{x^2 + x} = \lim_{x \to -1} \frac{2(\sqrt{x^2+3} - 2) \cdot (\sqrt{x^2+3} + 2)}{x(x+1) \cdot (\sqrt{x^2+3} + 2)} =$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{2(x^2 - 1)}{x(x+1) \cdot (\sqrt{x^2+3} + 2)} = \lim_{x \to -1} \frac{2(x-1)(x+1)}{x(x+1) \cdot (\sqrt{x^2+3} + 2)} = 1.$$

Άρα $P(\Gamma \cup I) = 1$.

Επειδή τα ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα $\Gamma \cup I = \Omega$ άρα $\Gamma \cup I$ είναι το βέβαιο ενδεχόμενο.

Γ2. Από προσθετικό νόμο έχουμε:

$$P(\Gamma \cup I) = P(\Gamma) + P(I) - P(\Gamma \cap I) \Leftrightarrow 1 = \frac{3\nu}{\nu^2+1} + \frac{\nu+2}{\nu^2+1} - \frac{\nu+1}{\nu^2+1} \Leftrightarrow$$

$$\nu^2 + 1 = 3\nu + 1 \Leftrightarrow \nu^2 - 3\nu = 0 \Leftrightarrow \nu(\nu - 3) = 0 \overset{\nu \geq 3}{\Leftrightarrow} \nu = 3.$$

Γ3. Επειδή $(\Gamma \cup I) \cap (I \cup \Gamma) = \varnothing$ από απλό προσθετικό νόμο έχουμε

$$P((\Gamma - I) \cup (I - \Gamma)) = P(\Gamma - I) + P(I - \Gamma) = P(\Gamma) - P(\Gamma \cap I) + P(I) - P(I \cap \Gamma) = P(\Gamma) + P(I) - 2P(\Gamma \cap I) =$$

$$= \frac{9}{10} + \frac{5}{10} - \frac{8}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

Γ4. Επειδή τα ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα, από κλασικό ορισμό πιθανότητας έχουμε

$$P(\Gamma \cap I) = \frac{4}{10} \Leftrightarrow \frac{N(\Gamma \cap I)}{N(\Omega)} = \frac{4}{10} \Leftrightarrow \frac{32}{N(\Omega)} = \frac{4}{10} \Leftrightarrow N(\Omega) = 80$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f(x) = \dfrac{1 + \ln^2 x}{x}, \ x > 0$

Για κάθε $x > 0$ η f παραγωγίζεται ως πράξεις παραγωγισίμων συναρτήσεων με :

$$f'(x) = \frac{2\ln x - 1 - \ln^2 x}{x^2} = -\frac{(\ln x - 1)^2}{x^2} \leq 0$$

x	0		e		$+\infty$
f'		–	0	-	
f		↘		↘	

Επειδή η f είναι συνεχής στο x_o=e η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$

Δ2. Έχουμε Κ(x,0) και Λ(0,f(x)) και f(x)>0 για κάθε x>0.

Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $E(x)=xf(x)=1+\ln^2 x$, x>0.

$E'(x)=\frac{2\ln x}{x}$. $E'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$, $E'(x)>0 \Leftrightarrow x>1$.

Η συνάρτηση Ε έχει ελάχιστο για x = 1 το f(1) = 1.Άρα το ορθογώνιο είναι τετράγωνο.

Δ3. Έχουμε $f'(1)=-1$, άρα $\lambda=-1$.

Τότε $\varepsilon: y=-x+\beta$.

Επομένως $\bar{y}=-\bar{x}+\beta=-10+\beta$ και $s_y=|-1|s_x=s_x=2$.

$CV_y=\frac{s_y}{|\bar{y}|}=\frac{2}{|-10+\beta|}$.

Αρκεί $CV_y \le \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{2}{|-10+\beta|} \le \frac{1}{10} \Leftrightarrow 20 \le |-10+\beta| \Leftrightarrow -10+\beta \ge 20$ ή $-10+\beta \le -20$ άρα $\beta \ge 30$ ή $\beta \le -10$.

Τελικά $\beta \in (-\infty,-10] \cup [30,+\infty)$.

Δ4. Επειδή $A \ne \varnothing$ και $A \cap B \ne \varnothing$ έχουμε ότι $0<P(A) \le 1$ και $0<P(A \cup B) \le 1$.

$A \subseteq A \cup B$ άρα $P(A) \le P(A \cup B)$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα, επομένως $f(P(A)) \ge f(P(A \cup B))$ (1).

Ομοίως $P(A \cap B) \le P(A \cup B)$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα. Άρα $f(P(A \cap B)) \ge f(P(A \cup B))$ (2).

Με πρόσθεση των (1) και (2) κατά μέλη έχουμε $f(P(A))+f(P(A \cap B)) \ge 2f(P(A \cup B))$